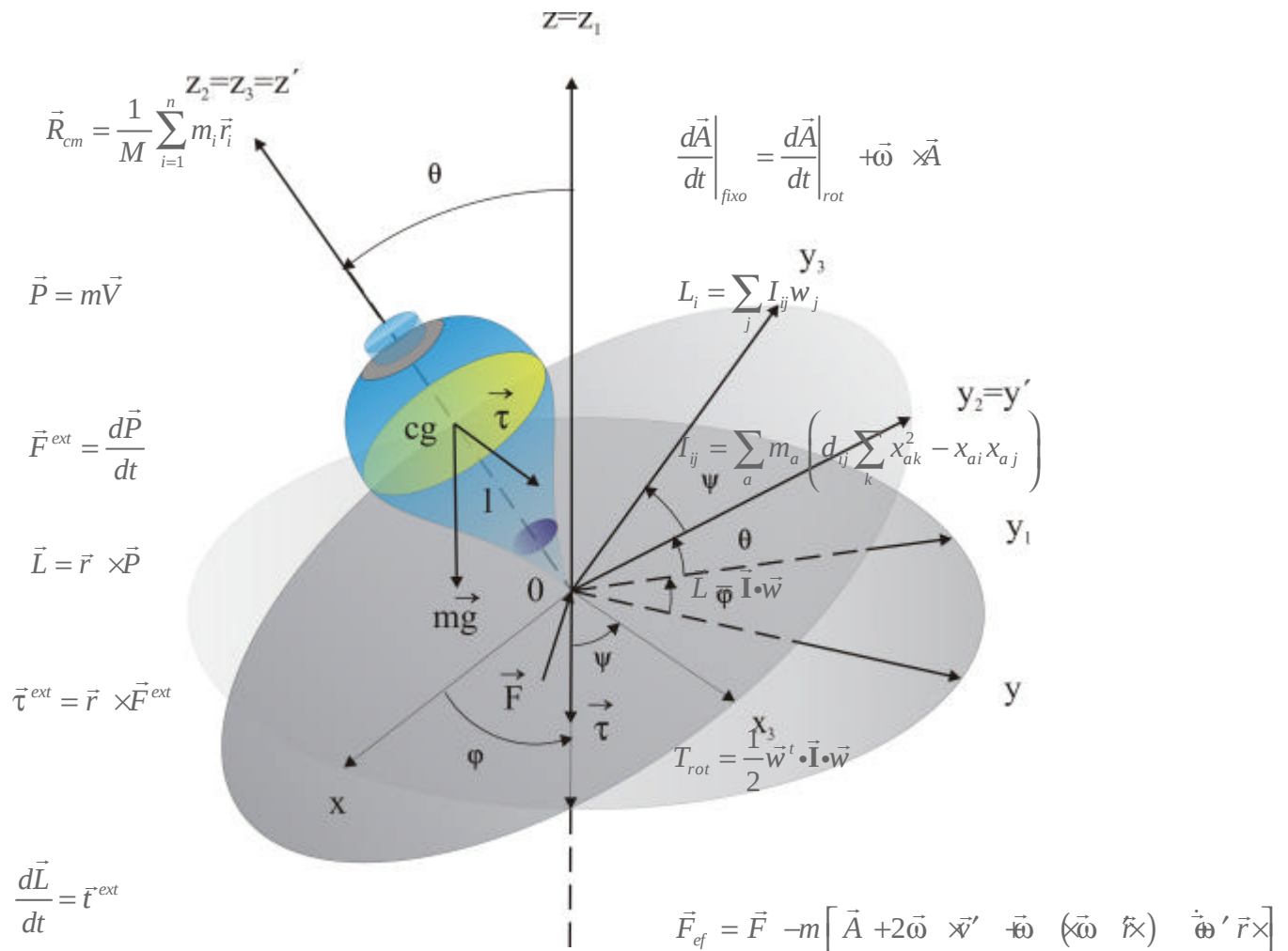


UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



NOTAS DE AULA DA DISCIPLINA
MECÂNICA TEÓRICA I

Antonio Pinto Neto

Identidades Vetoriais

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \phi + \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times (\phi \vec{A}) = \vec{\nabla} \phi \times \vec{A} + \phi \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla}^2 \phi$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A}$$

Teoremas Vetoriais

$$\int_v (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \oint_s \vec{A} \cdot \hat{n} dS$$

$$\int_v \vec{\nabla} \psi dV = \int_s \psi \hat{n} dS$$

$$\int_v (\vec{\nabla} \times \vec{A}) dV = \int_s (\hat{n} \times \vec{A}) dS$$

$$\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \hat{n} dS$$

$$\oint_c \psi d\vec{l} = \int_s (\hat{n} \times \vec{\nabla} \psi) dS$$

$$\int_v (\phi \vec{\nabla}^2 \psi + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi) dV = \oint_s \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

$$\int_v (\phi \vec{\nabla}^2 \psi + \psi \vec{\nabla}^2 \phi) dV = \oint_s \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS$$

Operadores Vetoriais

Coordenadas retangulares

$$\vec{\nabla}\Phi = \hat{x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\vec{\nabla}^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla}\Phi = \hat{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} + \hat{z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\phi}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) + \hat{z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right)$$

$$\vec{\nabla}^2\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla}\Phi = \hat{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\hat{r}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] + \frac{\hat{\theta}}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi)\right] + \frac{\hat{\phi}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$$

$$\vec{\nabla}^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

Notas de aula da disciplina

MECÂNICA TEÓRICA I

Antonio Pinto Neto

Doutor em Física pela UNICAMP

Mestre em Física pela UNICAMP

Licenciado em Física pela UFMA

Professor Adjunto do Departamento de Física da UFMA

Notas de aula da disciplina

MECÂNICA TEÓRICA I

Pinto Neto, Antonio

Notas de aula da disciplina mecânica Teórica I / Antonio

Pinto Neto. –São Luís:EDUFMA, 2002.

306p.

1. Mecânica clássica 2. Mecânica teórica I. Título

CDD 531

CDU 531.12

APRESENTAÇÃO

É com grande entusiasmo que apresento à comunidade de estudantes e professores de Física da Universidade Federal do Maranhão e, quiçá, de outras Universidades Brasileiras, as *Notas de Aula da Disciplina Mecânica Teórica I*, do professor Antonio Pinto Neto, membro do Departamento de Física daquela Universidade.

Embora a *Mecânica Teórica* seja uma disciplina amplamente divulgada por intermédio de textos publicados no exterior e mesmo no Brasil, o professor Pinto a emprega de um modo diferente da apresentada naqueles textos. Com efeito, os diversos temas tratados em seus 9 Capítulos são desenvolvidos com o caráter de um Caderno de Encargos, pois, além desse professor discutir os conceitos físicos envolvidos em cada Capítulo, os exemplos utilizados (alguns deles relacionados à Física do cotidiano) são resolvidos com o acompanhamento das passagens algébricas necessárias e essenciais para os seus entendimentos, graças a um glossário das principais fórmulas e expressões matemáticas usadas no texto.

Diante disso, esse texto do professor Pinto o qualifica como leitura obrigatória para os que se interessam pelo instigante estudo da Mecânica.

Belém, outubro de 2002

José Maria Filardo Bassalo

Professor Titular do Departamento de Física da Universidade Federal do Pará

“E com o bucho mais cheio comecei a pensar
Que eu me organizando posso desorganizar
Que eu desorganizando posso me organizar”

Da lama ao caos (Chico Science)

Prefácio do Autor

Esse livro é resultante das notas de aula da disciplina Mecânica Teórica I, ministrada por mim no Curso de Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão. No Curso de Física, tanto na Licenciatura quanto no Bacharelado, esta disciplina faz parte do núcleo obrigatório; tem carga horária semestral de 60 horas e é cursada após o aluno ter estudado as seguintes disciplinas: Física Geral e Experimental I (Mecânica básica), Cálculo III (Cálculo de várias variáveis) e Equações Diferenciais Ordinárias.

A disposição do material tem a seguinte forma: apresentamos primeiramente toda a teoria necessária (Capítulos I, II, III e IV) ao desenvolvimento das principais aplicações da Mecânica Clássica (Capítulos V, VI, VII e VIII), finalizando com a generalização do formalismo para tratar do movimento de corpos rígidos. Toda essa abordagem é feita utilizando-se apenas as Leis de Newton e os Teoremas de Conservação.

Durante todo o texto procurei desenvolver todas as passagens matemáticas necessárias à compreensão do problema físico envolvido.

Gostaria de externar os meus sinceros agradecimentos às pessoas que contribuíram para que essa publicação fosse possível:

- À UFMA e a FAPEM, pela viabilização financeira da publicação.
- Ao Professor J.M.F. Bassalo da UFPA, pela primeira leitura, sugestões de mudanças e revisão no texto preliminar.
- Aos Professores do DEFIS da UFMA: C.A.C. Feitosa, J.A. Batista e M.M. Ferreira Jr., pelas correções e sugestões de mudanças em partes do texto preliminar.
- Ao Professor J.A.R. Fernandes do CEUMA, pela ajuda na elaboração da capa e das figuras.
- À Professora I.B. Malheiros, pelas correções gramaticais e ortográficas do texto.
- Ao Professor M.S. Monteiro do CEFET, pela ajuda nos problemas computacionais.
- À funcionária do DEFIS A. de J.D. Lemos, pela digitação do texto.
- Ao Professor do DEQUI da UFMA A. Tanaka pelo incentivo e apoio.
- Aos Professores do DEFIS da UFMA: J.M.R. dos Santos, R.C. de Sousa, A.J.da S. Oliveira, J.R. Pereira e J. de J. Oliveira, pelo estímulo e incentivo.
- À Secretária do DEFIS, M. da C.C. Araújo, pelo apoio.

- Aos alunos que fizeram a disciplina Mecânica Teórica I comigo, dando sugestões e fazendo críticas à abordagem dada por mim.
- À minha mulher (Evaldinolia) e filhos (Lorena e Antônio) pelo apoio incondicional em todas as horas.

São Luís (MA), outubro de 2002

Antonio Pinto Neto

CONTEÚDO

- Introdução Geral

- Capítulo I

Vetores, matrizes e cinemática de uma partícula

1-1 – Introdução	I-01
1-2 - Sistema de referência	I-06
1-3 - Mudança do sistema de coordenadas	I-06
1-4 – Velocidade	I-11
1-5 – Aceleração	I-13
1-6 – Deslocamento, velocidade e aceleração angulares	I-15
1-7 – Posição, velocidade e aceleração em outros sistemas de coordenadas	I-19
1-7-1 – Sistema de coordenadas polares	I-20
1-7-2 – Sistema de coordenadas cilíndricas	I-22
1-7-3 – Sistema de coordenadas esféricas	I-25

- Capítulo II

Formulação newtoniana da Mecânica

2-1 – Introdução	II-01
2-2 – A 1ª Lei de Newton	II-01
2-3 – A 2ª Lei de Newton	II-02
2-4 – A 3ª Lei de Newton	II-04
2-5 – Transformação de Galileu	II-05
2-6 - Leis de Newton para rotação	II-07
2-7 – Trabalho, energia e teoremas de conservação	II-09
2-8 – Sistema de partículas	II-14

- Capítulo III

Integração da equação de movimento

3-1 – Introdução	III-01
3-2 – Movimento sob a ação de uma força constante	III-01
3-3 – Movimento sob a ação de uma força dependente do tempo	III-05
3-4 – Movimento sob a ação de uma força dependente da velocidade	III-11
3-5 – Movimento sob a ação de uma força dependente da posição	III-16
3-6 – Sistema de massa variável no tempo	III-19

- Capítulo IV

Movimento em referenciais não inerciais

4-1 – Introdução	IV-01
4-4 – Sistema de coordenadas acelerado	IV-01
4-3 – Movimento de uma partícula próximo à superfície da Terra	IV-11
4-4 – O pêndulo de Foucault	IV-14

- Capítulo V

Oscilações

5-1 – Introdução	V-01
5-2 – O oscilador harmônico simples	V-02
5-3 – O oscilador harmônico simples bidimensional	V-06
5-4 – O oscilador harmônico amortecido	V-14
5-5 – O oscilador harmônico forçado	V-24
5-6 – Solução da equação de movimento do oscilador harmônico forçado pelo método de Fourier	V-45
5-7 – Solução da equação de movimento do oscilador harmônico forçado pelo método de Green	V-46

- Capítulo VI

Movimento sob a ação de uma força central

6-1 – Introdução	VI-01
6-2 – O problema de dois corpos	VI-01
6-3 – Propriedades dos movimentos sob a ação de forças centrais	VI-05
6-4 – Potencial efetivo e classificação das órbitas	VI-07
6-5 – Solução para o problema do movimento sob a ação de uma força central	VI-12
6-6 – Força central inversamente proporcional ao quadrado da distância	VI-15
6-7 – As Leis de Kepler	VI-21
6-8 – Dinâmica orbital	VI-28
6-9 – Órbitas hiperbólicas	VI-35

- Capítulo VII

Gravitação

7-1 – Introdução	VII-01
7-2 – A Lei de Newton para a gravitação	VII-01
7-3 – Campo e potencial gravitacional	VII-05
7-4 – As equações dos campos gravitacionais	VII-11

- Capítulo VIII

Colisões entre partículas

8-1 – Introdução	VIII-01
8-2 – Colisões unidimensionais e o coeficiente de restituição	VIII-02
8-3 – Colisões bidimensionais elásticas e os referenciais do LAB e do CM	VIII-07
8-4 – Seção de choque de espalhamento nos sistemas do CM e LAB	VIII-25
8-5 – Espalhamento por uma força central	VIII-28

- Capítulo IX

Movimento de corpos rígidos

9-1 – Introdução	IX-01
9-2 – O movimento de um corpo rígido	IX-02
9-3 – Os ângulos de Euler	IX-06
9-4 – Um vetor no referencial do corpo rígido e sua relação	

com o referencial inercial	IX-11
9-5 – Energia cinética, momento angular e torque	IX-14
9-6 – O tensor de inércia	IX-27
9-7 – Métodos de análise do movimento de um corpo rígido no espaço	IX-40
9-7-1 – O método de Poinsot	IX-41
9-7-2 – O método de Euler	IX-47
9-8 – O movimento de um pião simétrico com torque nulo	IX-49
9-9 – Movimento de um pião simétrico no campo gravitacional da Terra	IX-56

- Bibliografia consultada

INTRODUÇÃO GERAL

Em sua versão mais primitiva, a Mecânica Clássica estuda o movimento dos corpos a nível macroscópico, em que a velocidade destes é muito menor que a velocidade da luz, utilizando as Leis de Newton e/ou os Teoremas de Conservação (Conservação de Energia, Momento e Momento Angular) como ferramenta para solucionar problemas restritos a sua validade. Nossa disciplina, Mecânica Teórica I, tem como objetivo principal aprofundar essa abordagem, formalizando mais genericamente tópicos já estudados nas disciplinas Física I e Física II.

Formulações posteriores a Newton foram desenvolvidas e métodos mais genéricos e potentes foram aplicados na solução de problemas da Mecânica Clássica. Os Métodos de Lagrange, Hamilton e Hamilton-Jacobi seguem essa linha, e serão objeto de estudos na disciplina subsequente – Mecânica Teórica II. Essas formulações serviram de ponto de partida para o desenvolvimento da Mecânica Quântica, Mecânica Estatística e Teoria Quântica de Campos.

Para velocidades próximas à da luz, a Mecânica Clássica é modificada pela Teoria da Relatividade Especial (TRE), tópico a ser estudado em Mecânica Teórica II. Devemos salientar que isso introduz mudanças radicais em alguns conceitos fundamentais da Mecânica Clássica. Apesar disso, esta última continua sendo uma boa formulação para velocidades muito menores que a velocidade da luz. A generalização da TRE é feita pela Teoria Geral da Relatividade, que não é objeto de estudo da Mecânica Clássica.

Para o domínio microscópico faz-se necessária a Mecânica Quântica. Sua relação com a Mecânica Clássica é feita pelo Teorema de Ehrenfest, que faz o limite clássico da Mecânica Quântica – assunto a ser discutido na disciplina Mecânica Quântica I.

Utilizamos aqui o conceito newtoniano de espaço e tempo, “o tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por si só e por sua própria natureza, flui uniformemente, sem qualquer relação com nenhuma coisa externa, e é também chamado de duração” e “espaço absoluto, por sua própria natureza, sem qualquer relação com algo externo, permanece sempre semelhante e imóvel”. Assim, consideramos que ambos sejam contínuos, independentes, sem conexão com algo externo e a geometria do espaço é euclidiana.

Denominamos de corpo um objeto que tem massa e extensão, e partícula um corpo cujas dimensões podem ser negligenciadas na descrição de seu movimento. A utilização desses conceitos depende, basicamente, da escala utilizada.

Como área de pesquisa atual, a Mecânica Clássica vem sendo aplicada ao estudo de fenômenos não lineares, tipo caos e movimentos estocásticos.

A apresentação dessa disciplina pode ser dividida em três partes. Na primeira, capítulos de I a IV, apresentamos a notação a ser utilizada, as Leis de Newton e os Teoremas de Conservação para uma partícula e para um sistema de partículas. Complementando, fazemos a generalização das Leis de Newton para sistemas não inerciais.

Na segunda parte (capítulos V a VIII), aplicamos a teoria desenvolvida a problemas fundamentais da Mecânica Clássica: Oscilações, Forças Centrais, Gravitação e Colisões.

Por último, capítulo IX, generalizamos o formalismo para que este possa ser aplicado a corpos macroscópicos - idealizados como corpos rígidos.

VETORES, MATRIZES E CINEMÁTICA DE UMA PARTÍCULA

1-1 INTRODUÇÃO

Os objetivos deste capítulo são:

- a) Introduzir conceitos fundamentais necessários ao desenvolvimento da cinemática;
- b) Apresentar a notação a ser utilizada.

Definimos um escalar como uma grandeza em que apenas a magnitude é suficiente para caracterizá-la.

Podemos fazer uma descrição do movimento ou de outras grandezas físicas sem especificarmos o sistema de coordenadas utilizando o conceito de vetores. Por definição, vetores são grandezas que têm magnitude, direção, sentido e obedecem às seguintes regras:

1 - Adição

Se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são vetores,

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \quad (1.1)$$

também é um vetor.

2 - Multiplicação por um escalar

Se c é um escalar e $\vec{A}$ um vetor,

$$\vec{B} = c\vec{A} \quad (1.2)$$

também é um vetor. Para $c = -1$, teremos:

$$\vec{B} = -\vec{A} \quad (1.3)$$

que é o oposto de $\vec{A}$.

3 - Diferença

Se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são dois vetores, a diferença entre eles é dada por

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$$

$$\vec{C} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad (1.4)$$

também é um vetor. Para $\vec{A} = \vec{B}$, temos que

$$\vec{A} - \vec{A} = \vec{0} \quad (\text{vetor nulo}) \quad (1.5)$$

4 - Comutação

Se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são dois vetores

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad (1.6)$$

5 - Associativa

Se $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ são vetores

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \quad (1.7)$$

6 - Distributiva

Se c é um escalar e $\vec{A}$ e $\vec{B}$ vetores,

$$c(\vec{A} + \vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B} \quad (1.8)$$

Notação vetorial utilizada:

a) Vetor $\vec{A}$

b) Vetor unitário $\hat{A} = \vec{A} / A \quad (1.9)$

c) Módulo do vetor $\vec{A} = A = |\vec{A}| \quad (1.10)$

Na medida do possível, não explicitaremos o sistema de coordenadas utilizadas.

Um vetor pode ser especificado por suas componentes e os vetores unitários ao longo dos eixos coordenados. Em coordenadas cartesianas, escrevemos um vetor $\vec{A}$ como

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 \quad (1.11)$$

$$= \sum_{i=1}^3 A_i\hat{e}_i \quad (1.12)$$

onde $\hat{e}_i (i = 1, 2, 3)$ são vetores unitários ao longo dos eixos coordenados

$x_i (x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$ e A_i as componentes de $\vec{A}$

$$\vec{A} = (A_1 = A_x, A_2 = A_y, A_3 = A_z) \quad (1.13)$$

A figura 1-1 mostra essa representação

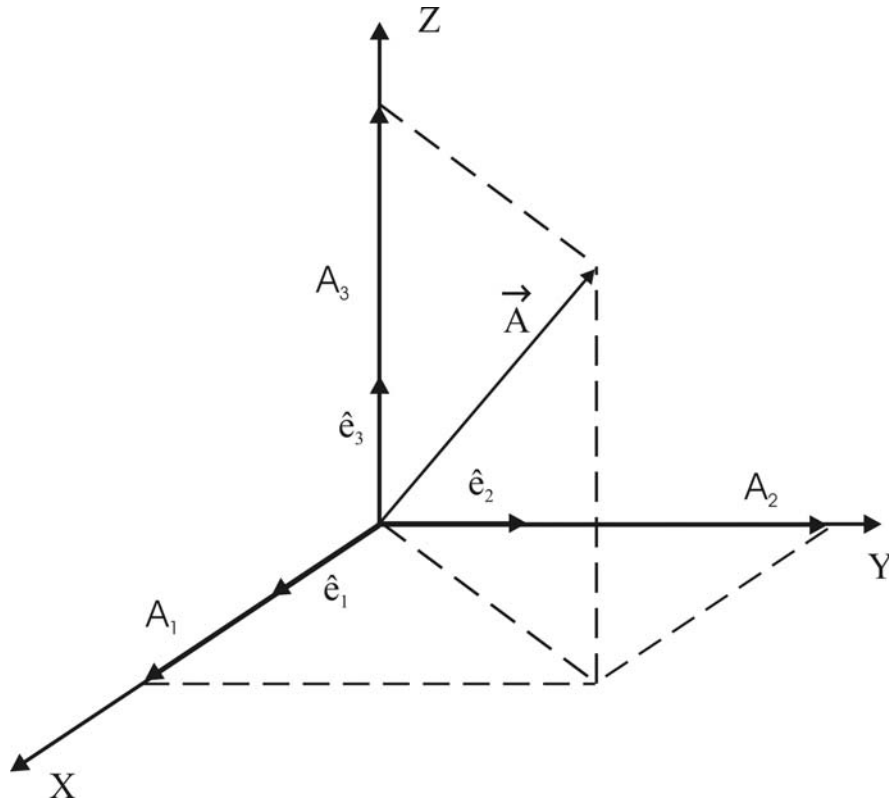


Figura 1-1

Dados dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$,

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i$$

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^3 B_i \hat{e}_i$$

definimos o produto escalar de $\vec{A}$ por $\vec{B}$,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad (1.14)$$

$$= \sum_{i=1}^3 A_i B_i \quad (1.15)$$

Caso $\vec{A} = \vec{B}$, teremos a definição de módulo do vetor $\vec{A}$,

$$\begin{aligned} A &= |\vec{A}| \\ &= \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} \\ A &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 A_i^2} \end{aligned} \quad (1.16)$$

O produto escalar também pode ser escrito da forma

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\vec{A}, \vec{B}) = AB \cos \theta \quad (1.17)$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Graficamente, representamos isso na figura 1-2

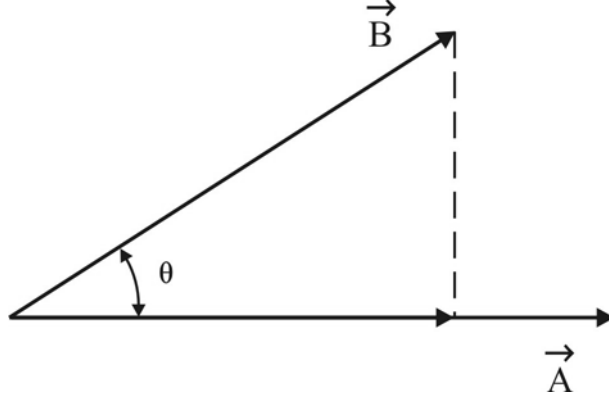


Figura 1-2

Isto é, o produto escalar é o produto do módulo do vetor $\vec{A}$ pela componente de $\vec{B}$ ao longo de $\vec{A}$. Caso $\vec{A} \perp \vec{B}$, o produto escalar é nulo.

Definimos o produto vetorial de $\vec{A}$ por $\vec{B}$, como um vetor $\vec{C}$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \quad (1.18)$$

com

$$C_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k \quad (1.19)$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se existem itens iguais} \\ 1 & \text{se i,j,k for permutação par} \\ -1 & \text{se i,j,k for permutação ímpar} \end{cases} \quad (1.20)$$

Por exemplo, da equação (1.20)

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = +1 \quad (1.21)$$

$$\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1 \quad (1.22)$$

Da equação (1.19)

$$C_1 = \sum_{j,k} \varepsilon_{1jk} A_j B_k = \varepsilon_{123} A_2 B_3 + \varepsilon_{132} A_3 B_2 \quad (1.23)$$

substituindo (1.21) e (1.22) em (1.23), teremos

$$C_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2 \quad (1.24)$$

De forma análoga,

$$C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3 \quad (1.25)$$

$$C_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1 \quad (1.26)$$

Assim, escrevemos $\vec{C}$ da forma

$$\vec{C} = C_1 \hat{e}_1 + C_2 \hat{e}_2 + C_3 \hat{e}_3 \quad (1.27)$$

Deve-se observar que o produto vetorial pode ser representado na forma matricial como

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Graficamente, representamos o produto vetorial na figura 1-3

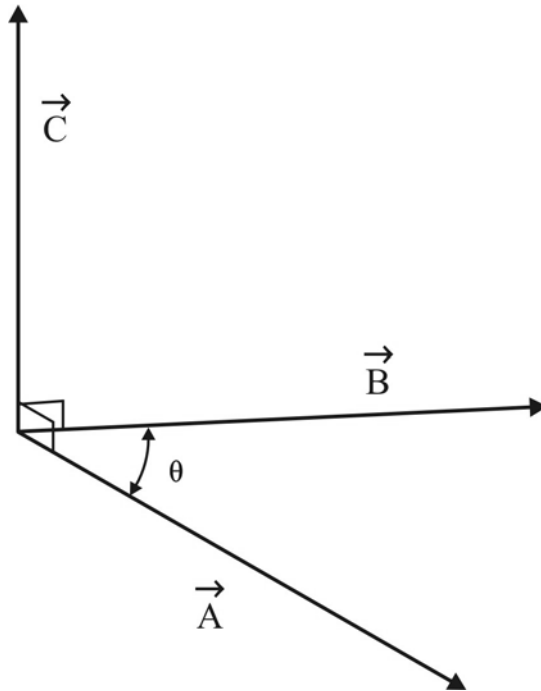


Figura 1-3

Podemos representar o módulo do produto vetorial como

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta \quad (1.28)$$

Da figura 1-3 vemos que $\vec{C}$ é normal ao plano formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Caso $\vec{A} // \vec{B}$, o produto vetorial será nulo.

1-2 SISTEMA DE REFERÊNCIA

Para descrevermos o movimento de um corpo, precisamos especificar sua posição no espaço, como função do tempo, em relação a um sistema de referência. Usamos um sistema de coordenadas como sistema de referência.

Para especificarmos a posição de um ponto no espaço precisamos de 3 coordenadas (x_1, x_2, x_3) do raio vetor $\vec{R}$ em função do tempo t .

$$\vec{R} = R(t)$$

$$\vec{R} = x_1(t)\hat{e}_1 + x_2(t)\hat{e}_2 + x_3(t)\hat{e}_3 \quad (1.29)$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^3 x_i(t)\hat{e}_i \quad (1.30)$$

A escolha do sistema de coordenadas deve ser feita em função da simetria dos problemas. Quanto ao referencial, essa escolha é também arbitrária. Os movimentos em referenciais arbitrários são, geralmente, diferentes. Existem referenciais em que as partículas que não interagem com outras partículas movem-se em linha reta. Referenciais que satisfazem essa condição são ditos referenciais inerciais. Qualquer referencial que se move com velocidade constante em relação a um referencial inercial, também é um referencial inercial.

As leis da Mecânica têm a mesma forma em referenciais inerciais, o que torna esse tipo de referencial ideal para ser utilizado como sistema de referência. As leis de Newton têm validade apenas em referenciais inerciais. Sua generalização para referenciais não inerciais será feita durante essa disciplina (Capítulo 4).

1-3 MUDANÇA DO SISTEMA DE COORDENADAS

Sem perda de generalidade, usaremos o sistema de coordenadas cartesianas quando necessário explicitar um sistema de coordenadas.

Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas. Apenas o movimento de translação não irá apresentar nada de novo, por isso, iremos limitar nossa discussão aos efeitos de rotação e ver como as componentes de um vetor se transformam. Seja O o referencial fixo e O' o referencial rodado. A figura 1-4 mostra um vetor $\vec{R}$ nesses sistemas.

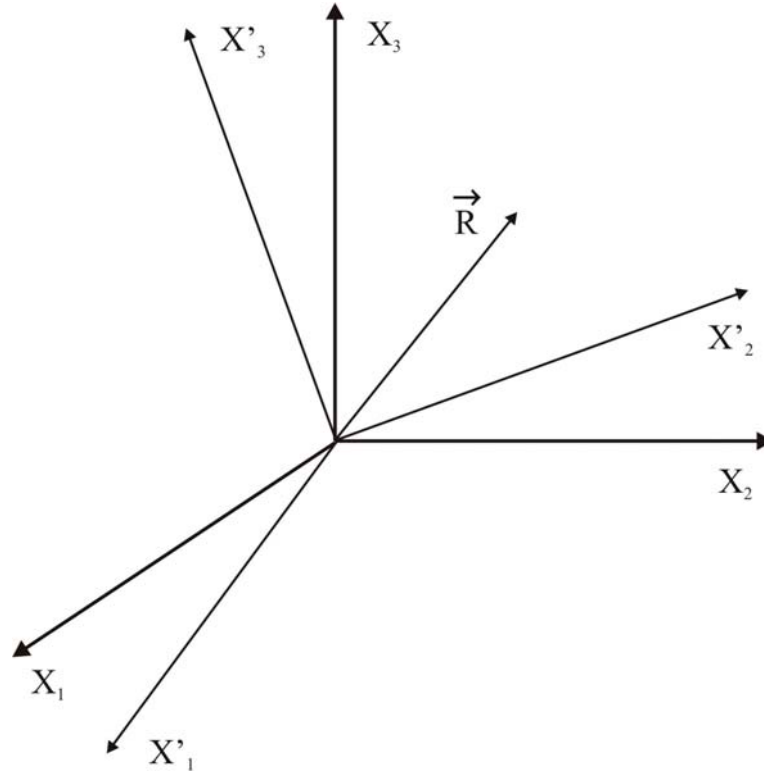


Figura 1-4

Em relação a O, o vetor $\vec{R}$ é escrito como

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i \quad (1.31)$$

conforme equação (1.12). Em relação a O', teremos

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^3 x'_i \hat{e}'_i \quad (1.32)$$

Tomando o produto da equação acima por $\hat{e}'_j$ e usando a relação de ortogonalidade

$$\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{ij} \quad (1.33)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

obtemos

$$x'_i = \vec{R} \cdot \hat{e}'_i \quad (1.34)$$

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j x_j$$

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} x_j \quad (1.35)$$

onde os λ_{ij} ($\lambda_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j$) são os coeficientes de transformação, freqüentemente denominados de cossenos diretores.

$$\begin{aligned}\lambda_{ij} &= \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j \\ \lambda_{ij} &= \cos(x'_i, x_j) \quad (i, j = 1, 2, 3)\end{aligned}\tag{1.36}$$

Faremos a seguir uma breve revisão sobre matrizes.

Representamos uma matriz A pelos seus elementos de matriz a_{ij} , onde o índice i especifica a linha e j a coluna. Assim, podemos representar uma matriz A, m por n, como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\tag{1.37}$$

Podemos representar vetores como matrizes. Na forma matricial, representamos um vetor como uma matriz linha ou como uma matriz coluna, isto é,

$$\vec{B} = (b_{11}, b_{12}, b_{13})\tag{1.38}$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}\tag{1.39}$$

Sejam A e B duas matrizes com mesmo número de linhas e mesmo número de colunas.

A matriz A é igual a B se todos os elementos de A forem iguais aos elementos de B.

A soma de A com B é representada por:

$$D = A + B\tag{1.40}$$

onde os elementos de D, d_{ij} , são dados por

$$d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\tag{1.41}$$

Para a diferença, procedemos de forma similar.

$$D = A - B = A + (-B)\tag{1.42}$$

Podemos definir multiplicação de matrizes apenas quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, de modo que

$$C = A \cdot B\tag{1.43}$$

onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj} \quad (1.44)$$

A multiplicação de matrizes é distributiva,

$$A(BC) = (AB)C \quad (1.45)$$

mas, geralmente, não é comutativa

$$AB \neq BA \quad (1.46)$$

A matriz transposta de A, denotada por A^t , é obtida pela troca das linhas pelas colunas da matriz A

$$a_{ij}^t = a_{ji} \quad (1.47)$$

A matriz inversa de A, denotada por A^{-1} , satisfaz a seguinte relação

$$A \cdot A^{-1} = \mathbf{1} \quad (1.48)$$

onde

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz identidade}$$

e os elementos de A^{-1} , a'_{ij} , são obtidos pela seguinte relação

$$a'_{ij} = \frac{\text{cofa}_{ij}}{\det A} \quad (1.49)$$

com $\det A \neq 0$ e $\text{cofa}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

A matriz identidade I é definida pela relação

$$IA = AI = A \quad (1.50)$$

Na forma matricial, a equação (1.35).

$$x'_i = \sum_j \lambda_{ij} x_j$$

pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

A matriz 3 x 3 com elementos λ_{ij} é denominada de matriz transformação.

Entretanto nem todos os seus elementos são independentes. Existem seis relações entre os λ_{ij} , de modo que apenas três são independentes entre si. As relações acima citadas são

obtidas considerando o fato de que o módulo do vetor independe do sistema de coordenadas utilizado, isto é,

$$\sum_{i=1}^3 x_i'^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_i \left(\sum_j \lambda_{ij} x_j \right) \left(\sum_k \lambda_{ik} x_k \right) \\ &= \sum_{ijk} \lambda_{ij} \lambda_{ik} x_j x_k \\ &= \sum_{k,j} \left(\sum_i \lambda_{ij} \lambda_{ik} \right) x_j x_k = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \end{aligned} \quad (1.53)$$

logo,

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_{ij} \lambda_{ik} = \delta_{jk} \quad (1.54)$$

que nos dá as seis equações procuradas. Qualquer transformação do tipo equação (1.35) que satisfaça a equação (1.54) é denominada de transformação ortogonal. A equação (1.54) é usualmente denominada de condição de ortogonalidade.

A matriz transposta de uma matriz ortogonal de rotação é igual a sua inversa,

$$\lambda^t = \lambda^{-1} \quad (1.55)$$

e o módulo de seu determinante é igual a 1. Caso o determinante seja positivo, denominamos essa rotação de própria. Para o determinante negativo, dizemos que essa rotação é imprópria, que corresponde a uma inversão do sistema de coordenadas, em relação a origem, e não pode ser gerada por rotações sucessivas.

Aplicações sucessivas de transformações ortogonais resulta em uma transformação ortogonal. Ilustraremos o caso para duas transformações. Para a primeira transformação $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$.

$$x'_k = \sum_j \alpha_{kj} x_j \quad (1.56)$$

Para a segunda, $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}''$

$$x''_i = \sum_k \beta_{ik} x'_k \quad (1.57)$$

Substituindo (1.57) em (1.56), teremos.

$$x''_i = \sum_{j,k} \alpha_{kj} \beta_{ik} x_j \quad (1.58)$$

$$x_i'' = \sum_j \gamma_{ij} x_j \quad (1.59)$$

onde

$$\gamma_{ij} = \sum_k \alpha_{kj} \beta_{ik} \quad (1.60)$$

Mostraremos agora que γ_{ij} satisfaz a condição de ortogonalidade [equação (1.54)].

Vejamos,

$$\sum_i \gamma_{ij} \gamma_{in} = \sum_{i,k,m} \beta_{ik} \alpha_{kj} \beta_{im} \alpha_{mn} \quad (1.61)$$

$$= \sum_{k,m} \left(\sum_i \beta_{ik} \beta_{im} \right) \alpha_{kj} \alpha_{mn}$$

$$= \sum_{k,m} \delta_{km} \alpha_{kj} \alpha_{mn}$$

$$\sum_i \gamma_{ij} \gamma_{in} = \sum_m \alpha_{mj} \alpha_{mn}$$

$$\sum_i \gamma_{ij} \gamma_{in} = \delta_{jn} \quad (1.62)$$

1-4 VELOCIDADE

Seja $\vec{r}$ o vetor posição de uma partícula que se move no tempo, em relação a um sistema de coordenadas, conforme mostra a figura 1-5.

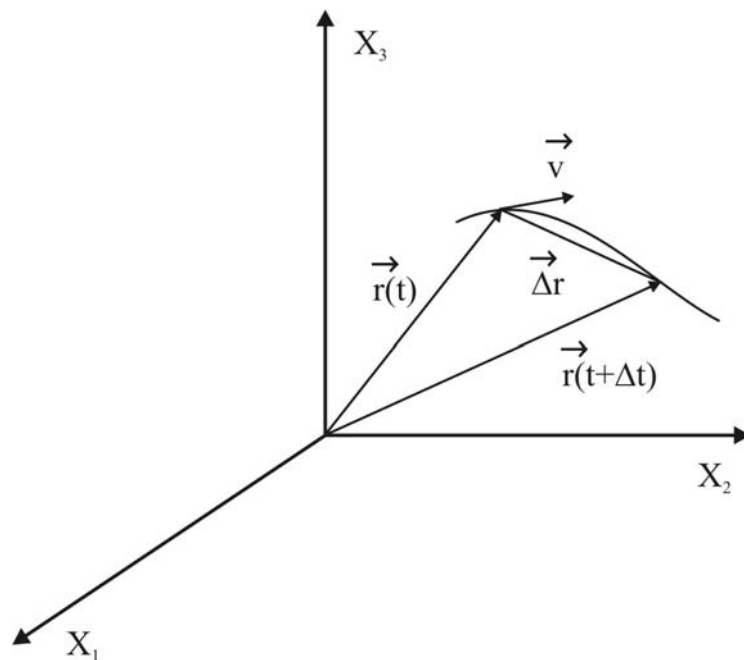


Figura 1-5

Sua trajetória é dada pela função $\vec{r}(t)$. A velocidade instantânea da partícula no instante de tempo t é dada por:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (1.63)$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right] \quad (1.64)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.65)$$

que é um vetor tangente à trajetória da partícula, isto é, podemos escrever

$$\vec{v} = v \hat{e}_t \quad (1.66)$$

em que,

$$\hat{e}_t = \frac{\vec{v}}{v} \quad (1.67)$$

Em coordenadas cartesianas, teremos o vetor posição dado por

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_1 + y(t)\hat{e}_2 + z(t)\hat{e}_3 \quad (1.68)$$

Derivando em relação ao tempo,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt}\hat{e}_1 + \frac{dy}{dt}\hat{e}_2 + \frac{dz}{dt}\hat{e}_3 \\ \vec{v} &= v_x\hat{e}_1 + v_y\hat{e}_2 + v_z\hat{e}_3 \end{aligned} \quad (1.69)$$

Tomando o módulo desse vetor, conforme a equação (1.16), teremos

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.70)$$

Vejamos agora, como muda a velocidade quando trocamos de referencial. Sejam O e O' dois referenciais onde $\vec{r} = \vec{r}'$ em $t = 0$. Após um intervalo de tempo dt , o referencial O move-se a uma distância $d\vec{R}$ de O' , e a partícula, uma quantidade $d\vec{r}$, relativa ao referencial O , conforme mostra a figura 1-6.

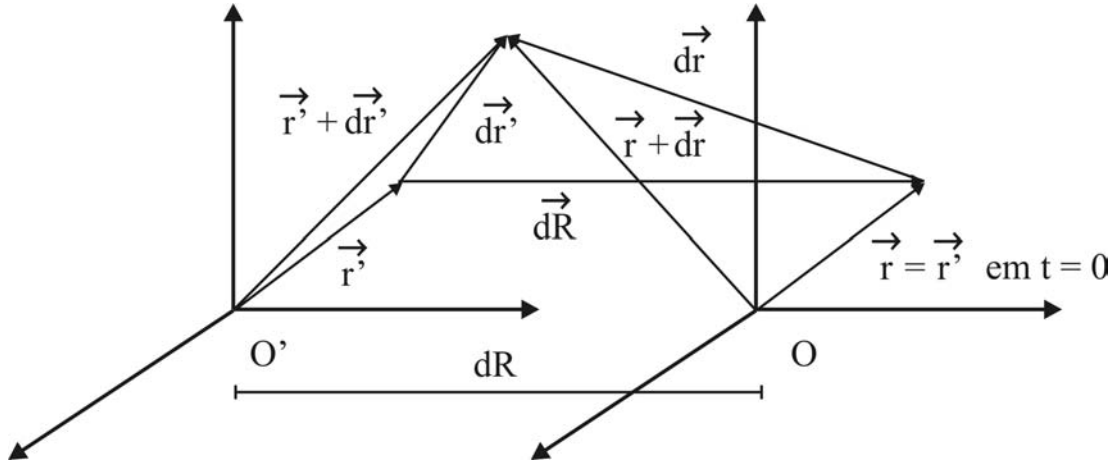


Figura 1-6

Temos que

$$d\vec{r}' = d\vec{R} + d\vec{r} \quad (1.71)$$

Dividindo (1.71) por dt

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}'}{dt} &= \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \vec{v}' &= \vec{V} + \vec{v} \end{aligned} \quad (1.72)$$

Na equação anterior $\vec{V}$ é a velocidade do referencial O em relação a O'.

1-5 ACELERAÇÃO

De forma geral, uma partícula ao mover-se no tempo, sua velocidade muda em módulo e direção. Para uma mudança de velocidade $\Delta\vec{V}$, em um intervalo de tempo Δt , definimos a aceleração instantânea ($\vec{a}$) como

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \quad (1.73)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (1.74)$$

De (1.74) e (1.66), temos

$$\begin{aligned} a &= \frac{d}{dt}(v\hat{e}_t) \\ &= \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + v\frac{d\hat{e}_t}{dt} \end{aligned} \quad (1.75)$$

dv/dt é a aceleração tangencial. Vejamos agora o significado do segundo termo. Sabemos que

$$\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t = 1 \quad (1.76)$$

Derivando a equação acima em relação a t ,

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t) = 0 \quad (1.77)$$

$$\hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{dt} + \frac{d\hat{e}_t}{dt} \cdot \hat{e}_t = 0$$

$$2\hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{dt} = 0 \quad (1.78)$$

isto é,

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} \perp \hat{e}_t \quad (1.79)$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{d\hat{e}_t}{dr} \frac{dr}{dt} \quad (1.80)$$

$$= v \frac{d\hat{e}_t}{dr}$$

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = v \left| \frac{d\hat{e}_t}{dr} \right| \hat{e}_n \quad (1.81)$$

Observe, das equações (1.79) e (1.81), que $\hat{e}_n$ é perpendicular a $\hat{e}_t$ e, portanto, normal à trajetória. Na equação (1.81), v é a velocidade no ponto e $|d\hat{e}_t/dr|$ a curvatura da trajetória, cujo recíproco é o raio de curvatura ρ . Assim, a aceleração será dada por

$$\vec{a} = a_t \hat{e}_t + a_n \hat{e}_n \quad (1.82)$$

em que,

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \dot{v} \quad (1.83)$$

e

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (1.84)$$

a_n é denominada de aceleração centrípeta.

1-6 DESLOCAMENTO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO ANGULARES

Para movimento linear, as quantidades básicas para a descrição do movimento são: deslocamento ($\vec{r}$), velocidade ($\vec{v}$) e aceleração ($\vec{a}$). Para movimento de rotação, essas quantidades são: deslocamento angular (θ), velocidade angular ($\vec{\omega}$) e aceleração angular ($\vec{\alpha}$).

O módulo do deslocamento angular é medido pelo ângulo descrito no plano perpendicular ao eixo de rotação $\hat{e}_3$. Para rotações infinitesimais o deslocamento angular é um vetor, cuja direção é a do eixo de rotação e o sentido de movimento anti-horário convencionado como positivo. Faremos a prova de que o deslocamento angular infinitesimal é um vetor, mostrando que estes são comutativos.

Consideremos uma partícula que se move em um círculo de raio R em torno de um eixo, perpendicular ao plano de movimento, onde $\vec{r}$ é o raio vetor de um ponto arbitrário O , sobre o eixo de rotação, a partícula, localizada no ponto P . Consideremos uma rotação infinitesimal $\delta\theta_1$ em torno do eixo de rotação, até o ponto Q , conforme mostra a figura 1-7.

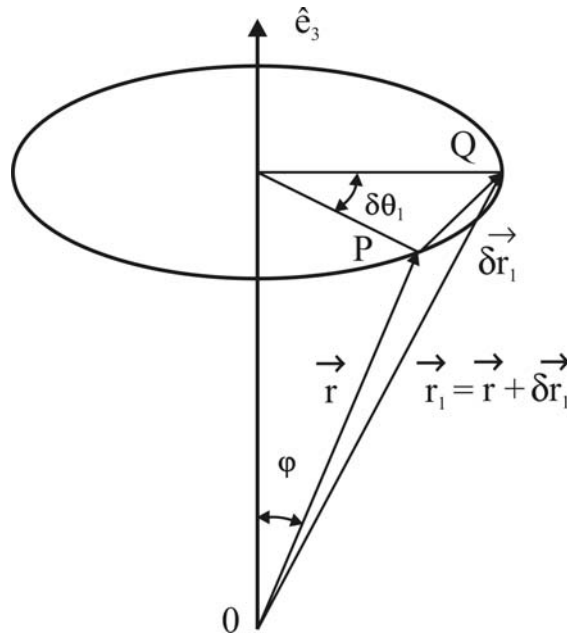


Figura 1-7

O deslocamento δr_1 será dado por

$$\delta r_1 = R \delta\theta_1 \quad (1.85)$$

$$= r \sin \varphi \delta\theta_1 \quad (1.86)$$

Vetorialmente a equação anterior é escrita da forma

$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{\theta}_1 \times \vec{r} \quad (1.87)$$

em que,

$$\delta \vec{\theta}_1 = \delta \theta_1 \hat{e}_3 \quad (1.88)$$

Fazendo uma segunda rotação infinitesimal $\delta \theta_2$ a partir de $\delta \theta_1$, o raio vetor $\vec{r}_{12}$ será

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 + \delta \vec{r}_2 \quad (1.89)$$

$$= \vec{r}_1 + \delta \vec{\theta}_2 \times \vec{r}_1$$

$$= \vec{r} + \delta \vec{r}_1 + \delta \vec{\theta}_2 \times \vec{r}_1$$

$$= \vec{r} + \delta \vec{r}_1 + \delta \vec{\theta}_2 \times (\vec{r} + \delta \vec{\theta}_1 \times \vec{r})$$

$$\vec{r}_{12} = \vec{r} + \delta \vec{\theta}_1 \times \vec{r} + \delta \vec{\theta}_2 \times \vec{r} + \delta \vec{\theta}_2 \times (\delta \vec{\theta}_1 \times \vec{r})$$

$$\vec{r}_{12} = \vec{r} + \delta \vec{r}_{12} \quad (1.90)$$

com

$$\delta \vec{r}_{12} = \delta \vec{\theta}_1 \times \vec{r} + \delta \vec{\theta}_2 \times \vec{r} + \delta \vec{\theta}_2 \times (\delta \vec{\theta}_1 \times \vec{r}) \quad (1.91)$$

Revertendo a ordem das rotações, teremos de modo análogo:

$$\delta \vec{r}_{21} = \delta \vec{\theta}_2 \times \vec{r} + \delta \vec{\theta}_1 \times \vec{r} + \delta \vec{\theta}_1 \times (\delta \vec{\theta}_2 \times \vec{r}) \quad (1.92)$$

Para rotações infinitesimais, podemos desprezar os termos de segunda ordem:

$$\delta \vec{\theta}_2 \times (\delta \vec{\theta}_1 \times \vec{r}) \text{ e } \delta \vec{\theta}_1 \times (\delta \vec{\theta}_2 \times \vec{r})$$

Assim,

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_{21} \quad (1.93)$$

isto é, as duas rotações infinitesimais $\delta \vec{\theta}_1$ e $\delta \vec{\theta}_2$ são comutativas. Para deslocamentos angulares finitos, isso não é verdadeiro. Mostramos na figura 1-8 duas rotações de $\pi/2$, em um corpo extenso, em torno dos eixos z e y e revertendo a ordem da rotação. Pelo resultado, verificamos que essas rotações não comutam.

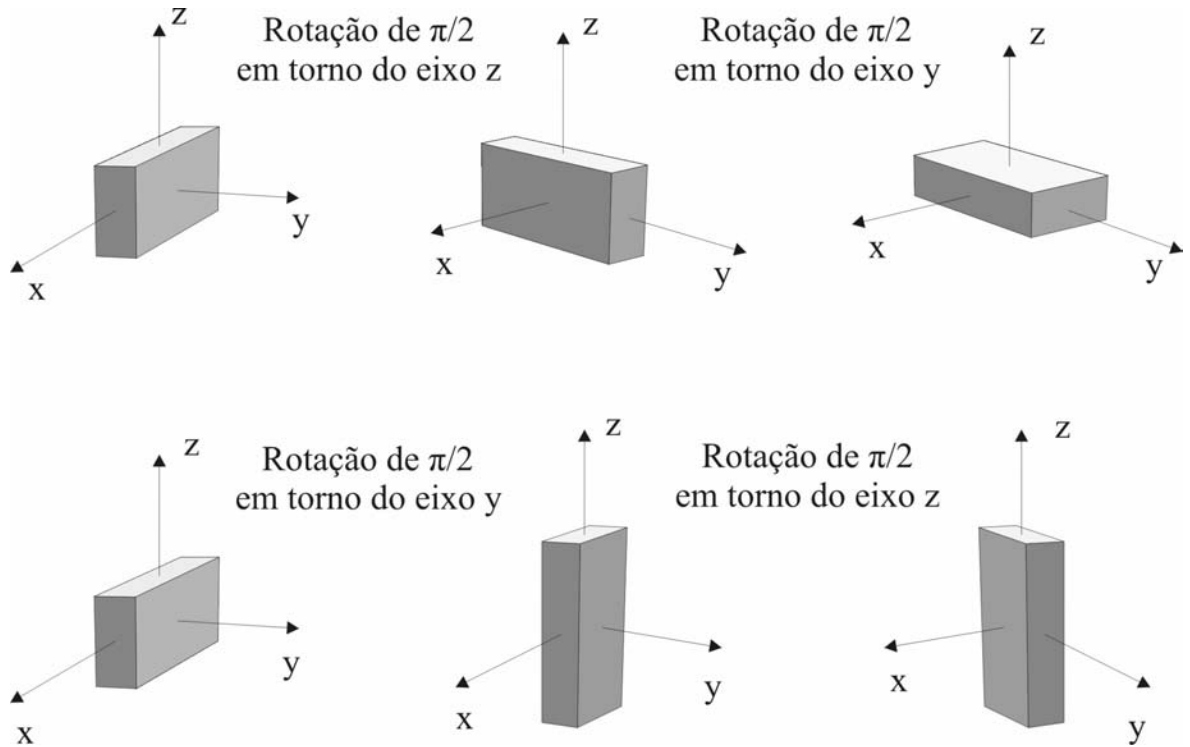


Figura 1-8

Definimos a taxa de variação do deslocamento angular com o tempo como a velocidade angular, cujo módulo é dado por:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right| \quad (1.94)$$

$$\omega = \left| \frac{d\vec{\theta}}{dt} \right| \quad (1.95)$$

A velocidade angular é um vetor cuja direção é a do eixo de rotação e o sentido é o mesmo de $d\vec{\theta}$.

Seja uma partícula que se move em um círculo de raio R , em torno de um eixo perpendicular ao plano de movimento, conforme mostra a figura 1-9,

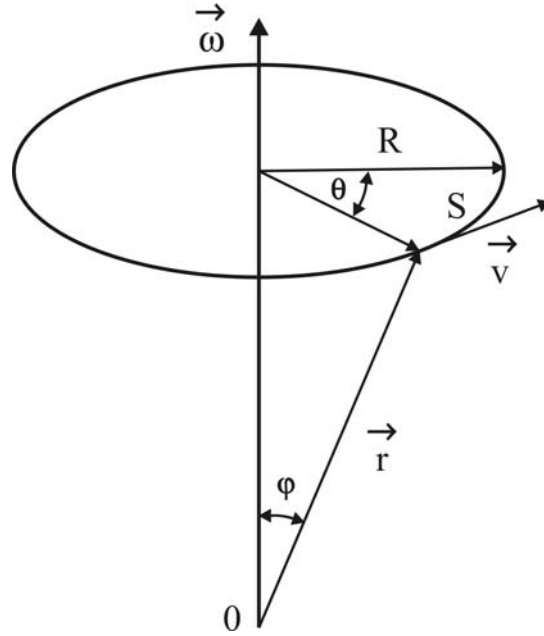


Figura 1-9

$\vec{r}$ é o vetor de um ponto arbitrário O , sobre o eixo de rotação, a partícula. O deslocamento angular está relacionado com o raio e o arco do círculo da forma

$$S = R\theta \quad (1.96)$$

Derivando em relação ao tempo,

$$\frac{dS}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} \quad (1.97)$$

$$v = R\omega \quad (1.98)$$

$$v = r\omega \sin \varphi \quad (1.99)$$

A direção de $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{r}$, e $\vec{v}$ repousa no plano do círculo. Podemos escrever a equação (1.99) da forma vetorial

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1.100)$$

A aceleração angular é a taxa de mudança de $\vec{\omega}$ no tempo, isto é,

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} \quad (1.101)$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (1.102)$$

Derivando a equação (1.100) em relação ao tempo,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.103)$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (1.104)$$

Substituindo (1.100) em (1.104),

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (1.105)$$

e usando a identidade vetorial

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (1.106)$$

no termo $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\omega^2 \quad (1.107)$$

Mostramos na figura 1-10 esses vetores

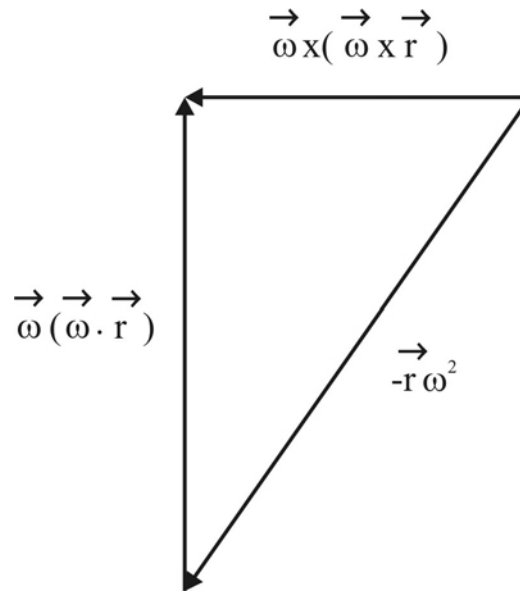


Figura 1-10

Vemos que o vetor $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ é dirigido para o centro, por isso, é chamado de aceleração centrípeta.

1-7 POSIÇÃO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO EM OUTROS SISTEMAS DE COORDENADAS

Nesta seção calcularemos a velocidade e aceleração para os sistemas de coordenadas polares, cilíndricas e esféricas. Nesses sistemas de coordenadas devemos observar, em alguns casos, mudança de direção dos vetores unitários, o que não ocorre com o sistema de coordenadas cartesianas.

1-7-1 Sistema de coordenadas polares

Mostramos na figura 1-11 o movimento de uma partícula no plano, em coordenadas polares (r, θ) . As relações entre o sistema de coordenadas cartesianas e polares são dadas por:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

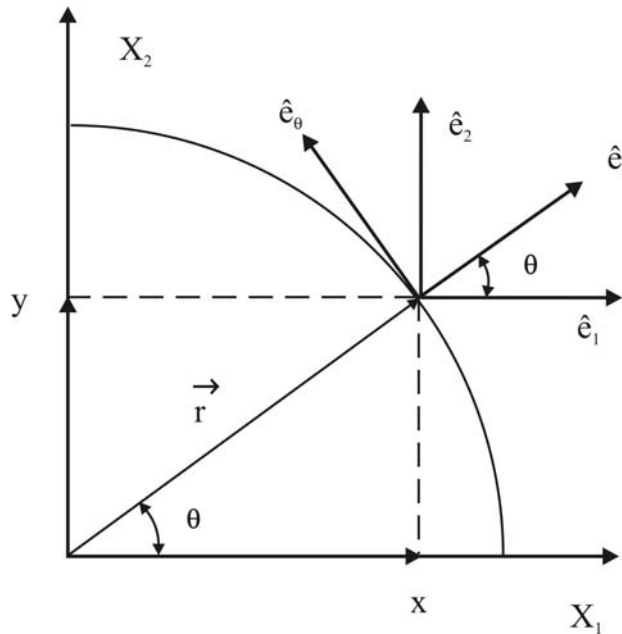


Figura 1-11

Os vetores unitários $\hat{e}_\theta$ e $\hat{e}_r$ têm as direções de θ e r crescentes. O vetor posição $\vec{r}$ é dado por

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \quad (1.108)$$

Calcularemos agora a velocidade. Na diferenciação devemos considerar a variação na direção dos vetores unitários $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} \\ \vec{v} &= \dot{r}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} \end{aligned} \quad (1.109)$$

Para calcularmos $d\hat{e}_r/dt$ devemos antes, escrever $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$. Da figura 1-12

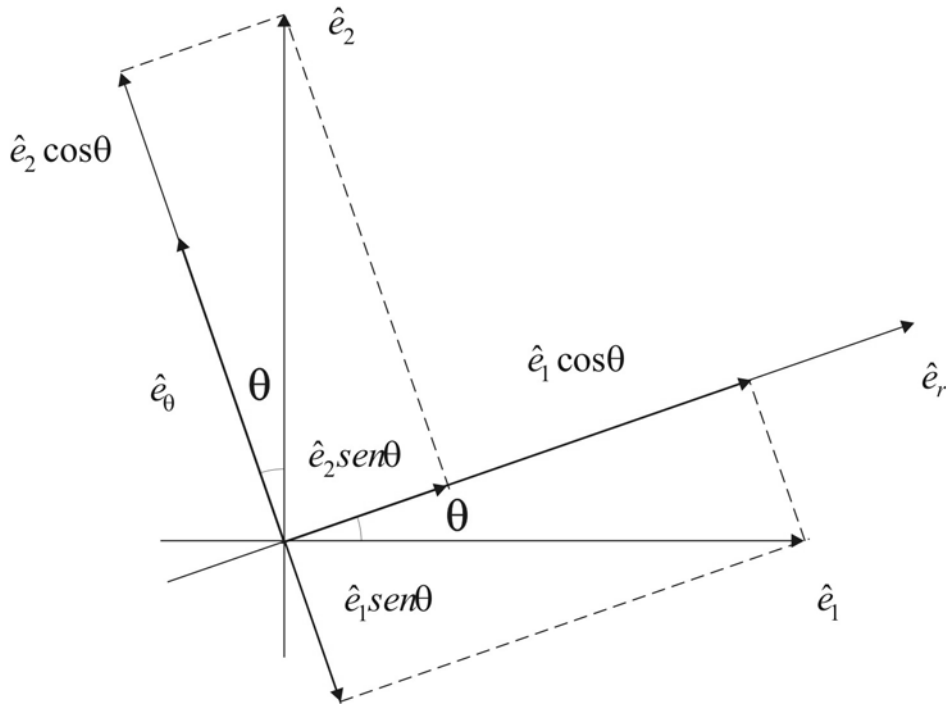


Figura 1-12

$$\hat{e}_r = \hat{e}_1 \cos \theta + \hat{e}_2 \sin \theta \quad (1.110)$$

$$\hat{e}_\theta = -\hat{e}_1 \sin \theta + \hat{e}_2 \cos \theta \quad (1.111)$$

Derivando (1.110) em relação ao tempo

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = -\hat{e}_1 \cdot \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} + \hat{e}_2 \cdot \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (1.112)$$

Comparando com (1.111), vemos que

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \hat{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} = \hat{e}_\theta \dot{\theta} \quad (1.113)$$

Substituindo (1.113) em (1.109),

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (1.114)$$

O primeiro termo é a componente radial da velocidade (velocidade radial) e o segundo, a componente transversal (velocidade tangencial).

A aceleração é obtida diferenciando a equação (1.114)

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \\ \vec{a} &= \dot{r} \hat{e}_r + r \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \end{aligned} \quad (1.115)$$

Da equação (1.111),

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\hat{e}_1 \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - \hat{e}_2 \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (1.116)$$

Comparando com (1.110),

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\hat{e}_r \dot{\theta} \quad (1.117)$$

Substituindo-se (1.113) e (1.117) em (1.115),

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta - r (\dot{\theta})^2 \hat{e}_r \\ &= \left[\ddot{r} - r (\dot{\theta})^2 \right] \hat{e}_r + [2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}] \hat{e}_\theta \\ &= a_r \hat{e}_r + a_\theta \hat{e}_\theta \end{aligned} \quad (1.118)$$

em que,

$$a_r = \ddot{r} - r (\dot{\theta})^2 \quad (1.119)$$

$$a_\theta = 2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \quad (1.120)$$

são as componentes radial e transversal da aceleração.

1-7-2 Sistema de coordenadas cilíndricas

Mostramos na figura 1-13 o sistema de coordenadas cilíndricas.

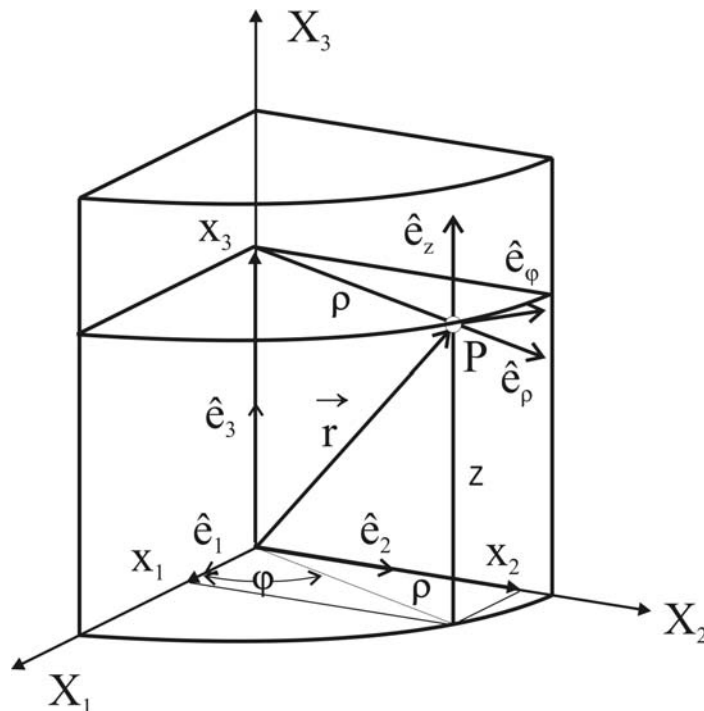


Figura 1-13

As relações entre o sistema de coordenadas cartesianas e o cilíndrico são dadas pelas equações abaixo

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \varphi & \rho^2 &= x_1^2 + x_2^2 \\ x_2 &= \rho \sin \varphi & \tan \varphi &= (x_2/x_1) \\ x_3 &= z & z &= x_3 \end{aligned} \quad (1.121)$$

Na figura 1-13, vemos que $\vec{\rho}$ é a projeção de $\vec{r}$ no plano $x_1 - x_2$ e φ o ângulo que $\vec{\rho}$ faz com o eixo $-x_1$. Os vetores unitários $\hat{e}_\rho$ e $\hat{e}_z$ têm direções que ρ e z aumentam, respectivamente; $\hat{e}_\varphi$ é paralelo ao plano $x_1 - x_2$, perpendicular a $\hat{e}_\rho$ e $\hat{e}_z$, e tem a direção na qual φ aumenta. Devemos observar que apenas $\hat{e}_\rho$ e $\hat{e}_\varphi$ variam de direção quando há movimento, em relação a esse sistema de coordenadas.

O vetor posição $\vec{r}$ é escrito como

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \quad (1.122)$$

Derivando em relação ao tempo,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\rho}{dt} \hat{e}_\rho + \rho \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt} \hat{e}_z + z \frac{d\hat{e}_z}{dt} \\ \vec{v} &= \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} + \dot{z} \hat{e}_z \end{aligned} \quad (1.123)$$

Vejamos agora como calcular $d\hat{e}_\rho/dt$ e $d\hat{e}_\varphi/dt$. Sabemos que

$$\hat{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r} / \partial \rho}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|} \quad (1.124)$$

Da equação (1.122),

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \hat{e}_\rho$$

Como o sistema de coordenadas cilíndricas pode ser pensado como um sistema de coordenadas polares onde se acrescenta o eixo- z , podemos obter $\hat{e}_\rho$ através da equação (1.110) trocando θ por φ . Assim,

$$\hat{e}_\rho = \cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \varphi \hat{e}_2 \quad (1.125)$$

Tomando

$$\hat{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r} / \partial \varphi}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|} \quad (1.126)$$

da equação (1.122)

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \rho \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \varphi}$$

Derivando (1.125) em função de φ e substituindo o resultado na equação acima,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \rho [-\sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_2] \quad (1.127)$$

Assim,

$$\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_2 \quad (1.128)$$

A outra componente não muda

$$\hat{e}_z = \hat{e}_3 \quad (1.129)$$

Da equação (1.125) vimos que

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = -\sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \hat{e}_1 + \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \hat{e}_2$$

Comparando com (1.128)

$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi \quad (1.130)$$

Derivando (1.128) em relação ao tempo

$$\frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} = -\cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \hat{e}_1 - \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \hat{e}_2$$

Comparando com a equação (1.125)

$$\frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi} \hat{e}_\rho \quad (1.131)$$

Usando agora (1.130) em (1.123),

$$\vec{v} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \dot{z} \hat{e}_z \quad (1.132)$$

Para determinarmos a aceleração, derivamos (1.132).

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \\ &= \ddot{\rho} \hat{e}_\rho + \dot{\rho} \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} + \dot{\rho} \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \hat{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} + \ddot{z} \hat{e}_z + \dot{z} \frac{d\hat{e}_z}{dt} \end{aligned} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ =0 \end{matrix}$$

Utilizando (1.130) e (1.131) na equação acima,

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \ddot{\rho} \hat{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \rho \ddot{\phi} \hat{e}_\phi - \rho \dot{\phi}^2 \hat{e}_\rho + \ddot{z} \hat{e}_z \\ \vec{a} &= [\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2] \hat{e}_\rho + [2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}] \hat{e}_\phi + \ddot{z} \hat{e}_z\end{aligned}\quad (1.133)$$

1.7-3 Sistema de coordenadas esféricas

Faremos aqui o mesmo procedimento feito para coordenadas cilíndricas. A figura 1-14 mostra o sistema de coordenadas esféricas

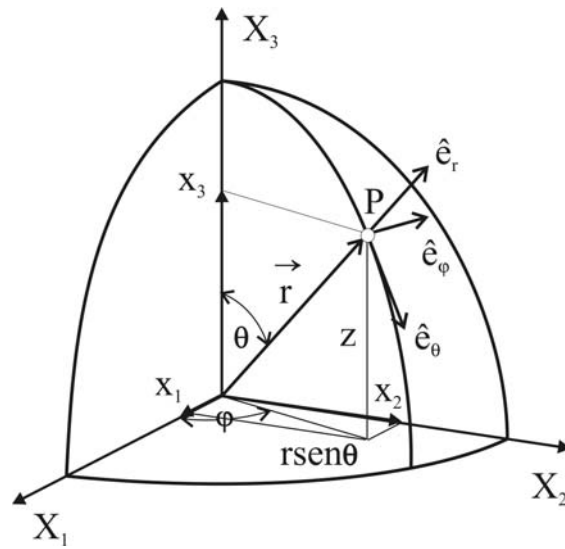


Figura 1-14

As relações entre o sistema de coordenadas esféricas e cartesianas são dadas pelas equações abaixo,

$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin \theta \cos \phi & r^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \phi & \tan \theta &= \left[(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} / x_3 \right] \\ x_3 &= r \cos \theta & \tan \phi &= [x_2 / x_1]\end{aligned}\quad (1.134)$$

Primeiramente vamos determinar os vetores unitários $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ e $\hat{e}_\phi$. Podemos escrever o vetor posição em coordenadas cartesianas como

$$\vec{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 \quad (1.135)$$

Utilizando as equações (1.134) em (1.135),

$$\vec{r} = r [\sin \theta \cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_2 + \cos \theta \hat{e}_3] \quad (1.136)$$

Para determinarmos $\hat{e}_r$, usamos a relação

$$\hat{e}_r = \frac{\partial \vec{r} / \partial r}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|} \quad (1.137)$$

De (1.136),

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = [\sin \theta \cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_2 + \cos \theta \hat{e}_3] \quad (1.138)$$

Substituindo (1.138) em (1.137) e observando que

$$\left| \partial \vec{r} / \partial r \right| = 1 \quad (1.139)$$

$$\hat{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_2 + \cos \theta \hat{e}_3 \quad (1.140)$$

De forma análoga

$$\hat{e}_\theta = \frac{\partial \vec{r} / \partial \theta}{\left| \partial \vec{r} / \partial \theta \right|} \quad (1.141)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r [\cos \theta \cos \varphi \hat{e}_1 + \cos \theta \sin \varphi \hat{e}_2 - \sin \theta \hat{e}_3] \quad (1.142)$$

$$\left| \partial \vec{r} / \partial \theta \right| = r \quad (1.143)$$

$$\hat{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \hat{e}_1 + \cos \theta \sin \varphi \hat{e}_2 - \sin \theta \hat{e}_3 \quad (1.144)$$

$$\hat{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r} / \partial \varphi}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|} \quad (1.145)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r [-\sin \theta \sin \varphi \hat{e}_1 + \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_2]$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r \sin \theta [-\sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_2] \quad (1.146)$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta} = r \sin \theta \quad (1.147)$$

$$\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_2 \quad (1.148)$$

Calcularemos agora as derivadas temporais dos vetores unitários, isto é, derivadas das equações (1.140), (1.144) e (1.148),

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}_r}{dt} &= \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi \hat{e}_1 - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_1 + \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi \hat{e}_2 + \\ &\quad + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_2 - \dot{\theta} \sin \theta \hat{e}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{e}_r}{dt} &= \dot{\theta} (\cos \theta \cos \varphi \hat{e}_1 + \cos \theta \sin \varphi \hat{e}_2 - \sin \theta \hat{e}_3) \\ &\quad + \dot{\varphi} \sin \theta [-\sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_2] \\ \frac{d\hat{e}_r}{dt} &= \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi\end{aligned}\quad (1.149)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} &= -\dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_1 - \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi \hat{e}_1 - \dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_2 + \\ &\quad + \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi \hat{e}_2 - \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_3 \\ \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} &= -\dot{\theta} (\sin \theta \cos \varphi \hat{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_2 + \cos \theta \hat{e}_3) \\ &\quad + \dot{\varphi} \cos \theta [-\sin \varphi \hat{e}_1 + \cos \varphi \hat{e}_2] \\ \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} &= -\dot{\theta} \hat{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \hat{e}_\varphi\end{aligned}\quad (1.150)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} &= -\dot{\varphi} \cos \varphi \hat{e}_1 - \dot{\varphi} \sin \varphi \hat{e}_2 \\ \frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} &= -\dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \hat{e}_\theta\end{aligned}\quad (1.151)$$

$$\frac{d^2 \hat{e}_r}{dt^2} = \frac{d}{dt} [\dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi]$$

$$\frac{d^2 \hat{e}_r}{dt^2} = \ddot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\theta} \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} + \ddot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi + \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_\varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \frac{d\hat{e}_\varphi}{dt}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \hat{e}_r}{dt^2} &= \ddot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\theta} [-\dot{\theta} \hat{e}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \hat{e}_\varphi] + \ddot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi + \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_\varphi + \\ &\quad + \dot{\varphi} \sin \theta (-\dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \hat{e}_\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \hat{e}_r}{dt^2} &= -\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - \dot{\theta}^2 \hat{e}_r + \ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \hat{e}_\theta + \\ &\quad + 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta + \ddot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi\end{aligned}\quad (1.152)$$

O vetor posição $\vec{r}$ é escrito como

$$\vec{r} = r \hat{e}_r \quad (1.153)$$

Derivando (1.153) em relação ao tempo,

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \dot{r}\hat{e}_r + r \frac{d\hat{e}_r}{dt} \\
\vec{v} &= \dot{r}\hat{e}_r + r \left(\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi \right) \\
\vec{v} &= \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi
\end{aligned} \tag{1.154}$$

Derivando (1.154) em relação ao tempo,

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r} \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta} \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi + r\ddot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi + \\
&\quad + r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_\phi + r\dot{\phi} \sin \theta \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} \\
&= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r} \left(\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi \right) + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + \\
&\quad + r\dot{\theta} \left(-\dot{\theta}\hat{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_\phi \right) + \dot{r}\dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi + r\ddot{\phi} \sin \theta \hat{e}_\phi + \\
&\quad + r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_\phi + r\dot{\phi} \sin \theta \left(-\dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_\theta \right) \\
\vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) \hat{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \hat{e}_\theta + \\
&\quad + \left(2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta \right) \hat{e}_\phi
\end{aligned} \tag{1.155}$$

FORMULAÇÃO NEWTONIANA DA MECÂNICA

2-1 INTRODUÇÃO

O objetivo central deste capítulo é apresentar as Leis de Newton, bem como os teoremas de conservação para uma única partícula. Após esse estudo, faremos a generalização do objetivo acima citado para um sistema de muitas partículas.

2-2 A 1ª LEI DE NEWTON - LEI DA INÉRCIA

A 1ª Lei afirma que:

“Um corpo permanece em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo e uniforme a menos que seja compelido a mudar esse estado por forças aplicadas”

isto é, o estado de repouso ou de movimento retilíneo e uniforme (MRU) é tratado em pé de igualdade. Sendo assim, não é necessário nenhuma força externa para manter o estado de MRU de um corpo. Isso é devido a uma propriedade intrínseca dos corpos, denominada de inércia. Na sua concepção original, a 1ª Lei foi definida em termos das grandezas “quantidade de movimento” e “quantidade de matéria”, denominações dadas ao que chamamos hoje de momento ($\vec{P}$) e massa (M), onde

$$\vec{P} = M\vec{V} \quad (2.1)$$

De acordo com a 1ª Lei,

$$\vec{P} = M\vec{V} = \text{constante} \quad (2.2)$$

Isto é, o momento se conserva. A equação (2.2) expressa matematicamente o princípio de conservação do momento.

Da forma como é colocada a 1ª Lei, seria natural perguntarmos em relação a que sistema de referência o corpo permanece em repouso ou MRU? Como contra exemplo, utilizamos o movimento em queda livre de dois corpos que são abandonados da mesma

altura, ao mesmo tempo, em queda livre. Apesar de permanecerem em repouso, um em relação ao outro, eles estão sujeitos a força da gravidade, o que aparentemente é uma contradição à 1ª Lei. Tal problema é contornado se observarmos que as Leis de Newton não têm validade em todos os sistemas de referência, isto é, apenas em um tipo especial de referencial essas leis são válidas. Denominamos esses referenciais de referenciais inerciais (já definido na seção 2 do capítulo I). O problema é melhor entendido se interpretarmos a 1ª Lei como a definição de referenciais inerciais. As outras leis, 2ª e 3ª seriam válidas apenas nestes referenciais.

Como poderíamos determinar esses referenciais inerciais? Na prática, deveríamos isolar completamente um corpo de todas as forças externas, o que é impossível. Devido a essa impossibilidade, resolvemos o problema especificando-se um referencial aproximadamente inercial, de acordo com as necessidades do problema. Qualquer outro referencial que se move em MRU em relação a um referencial inercial também é um referencial inercial.

2-3 A 2ª LEI DE NEWTON

Ao aplicarmos uma força externa a uma partícula, o seu estado irá mudar. A 2ª Lei especifica como essa mudança ocorre.

“A taxa de mudança do momento de uma partícula é igual a força externa aplicada sobre esta e tem a mesma direção da força”.

Matematicamente,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (2.3)$$

onde

$$\vec{P} = M\vec{V} \quad (2.4)$$

assim,

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(M\vec{V})$$

Para M constante

$$\vec{F} = M \frac{d\vec{V}}{dt} = M \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (2.5)$$

$$\vec{F} = M\vec{a} \quad (2.6)$$

que é a equação de movimento da partícula. Vimos que a equação de movimento é uma equação diferencial de 2ª ordem. Conhecida a forma da força e sabendo-se as condições iniciais do problema (posição e velocidade iniciais), sabemos, em princípio, como resolvê-lo. Isto é, sabendo-se a forma da força, a velocidade e a posição em um dado instante de tempo, podemos determinar o estado da partícula em qualquer outro instante de tempo.

Devemos observar que a posição e a velocidade iniciais são medidas simultaneamente com precisão absoluta, o que é proibido pela Mecânica Quântica, devido ao Princípio da Incerteza. Essa discussão será abordada na disciplina Mecânica Quântica I.

Caso não seja possível resolver a equação (2.5) de forma analítica, podemos obter uma solução aproximada ou, na pior das hipóteses, uma solução numérica.

Podemos interpretar a 2ª Lei de duas formas. A existência dessas duas interpretações deve-se ao fato de que não existem formas independentes para determinarmos a força $\vec{F}$. O próprio Newton é ambíguo sobre que interpretação ele tinha acerca do problema, sugerindo que a 2ª Lei seja ela mesma a definição de força, bem como uma lei de movimento. Isso transformaria as Leis de Newton numa Teoria Axiomática no sentido de que todas as conseqüências seriam obtidas da definição e não de uma lei experimentalmente deduzida. A segunda interpretação considera que a 2ª Lei, como as outras, é uma lei experimental formulada da generalização de observações e medidas experimentais, isto é, a 2ª Lei não deve ser utilizada como definição de força e nenhuma previsão pode ser feita de uma definição. Faz-se necessário definir a força de forma independente.

Das quatro forças existentes na natureza (forte, fraca, eletromagnética e gravitacional), apenas as forças gravitacionais e a eletromagnética podem ser consideradas no domínio da Mecânica Clássica.

A interação gravitacional foi deduzida por Newton através da análise das Leis de Kepler e dados experimentais do movimento dos planetas do sistema solar. Newton mostrou que a força entre duas partículas de massas m_1 e m_2 separadas por uma distância $\vec{r}_{12}$, é dada por

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (2.7)$$

Mostramos na figura 2-1 essa representação gráfica.

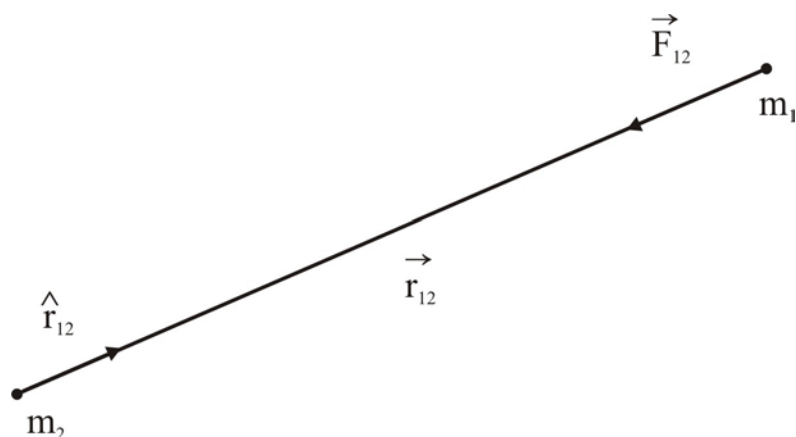


Figura 2-1

Para o caso eletromagnético, equações análogas são necessárias (Equações de Maxwell e Lei de Força de Lorentz).

2-4 A 3ª LEI DE NEWTON

A 3ª Lei de Newton afirma que:

“A força que dois corpos exercem entre si são iguais em módulo e opostas em sentido”.

Mostramos a representação gráfica da 3ª Lei na figura 2-2.

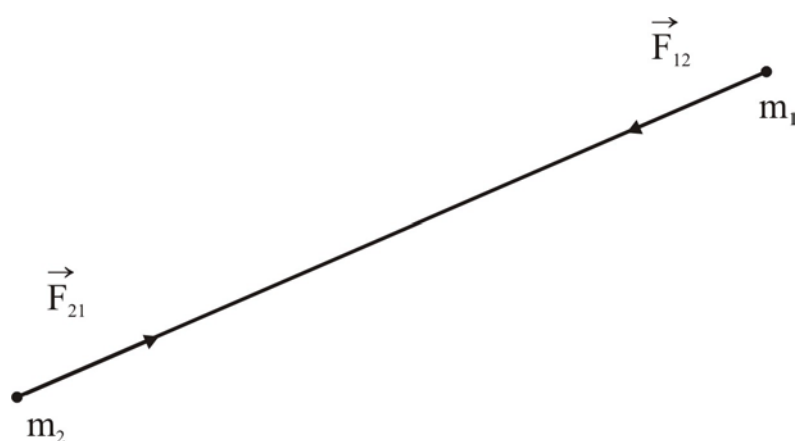


Figura 2-2

matematicamente representada pela equação abaixo.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.8)$$

Alguns autores consideram que a 1ª e 2ª Leis de Newton não são leis e sim a definição operacional de força. A 3ª Lei seria a lei que contém toda a física do movimento das Leis de Newton.

Devemos observar que a 3ª Lei não é uma lei geral da natureza. Sua validade é restrita a forças onde a linha de ação é dirigida ao longo da linha que conecta os objetos, isto é, quando as forças são centrais. Forças dependentes da velocidade não são centrais, e a 3ª Lei pode não ser aplicável. Entretanto, alguns autores argumentam que a 3ª Lei tem validade geral, pois esta pode ser vista como consequência da conservação do momento, e o momento sempre pode ser (re)definido de modo que haja conservação deste.

Utilizando a 2ª Lei de Newton, podemos escrever a 3ª Lei como,

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = -\frac{d\vec{P}_2}{dt} \quad (2.9)$$

O sinal menos indica que as duas partículas movem-se em direções opostas. Considerando que as massas sejam constantes, da Eq. (2.9),

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt} &= -m_2 \frac{d\vec{V}_2}{dt} \\ \frac{m_2}{m_1} &= -\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Tornando uma dessas massas como uma unidade de massa, podemos determinar a massa da outra partícula, medindo-se a aceleração que cada uma delas sofre.

A massa determinada da forma acima mencionada é chamada de massa inercial, que deve ser diferenciada da massa utilizada na Lei de Gravitação de Newton, equação (2.7), que é denominada de massa gravitacional. Experimentalmente foi demonstrado, com uma precisão de 10^{12} , que a massa inercial é igual a massa gravitacional. Essa igualdade é conhecida como Princípio de Equivalência da TRG de Einstein.

2-5 TRANSFORMAÇÃO DE GALILEU

Desejamos agora saber o efeito que tem nas Leis de Newton uma mudança no sistema de referência. Seja O um referencial inercial e O' um sistema de referência que se move com velocidade constante $\vec{V}$ em relação a O , conforme mostra a figura 2-3.

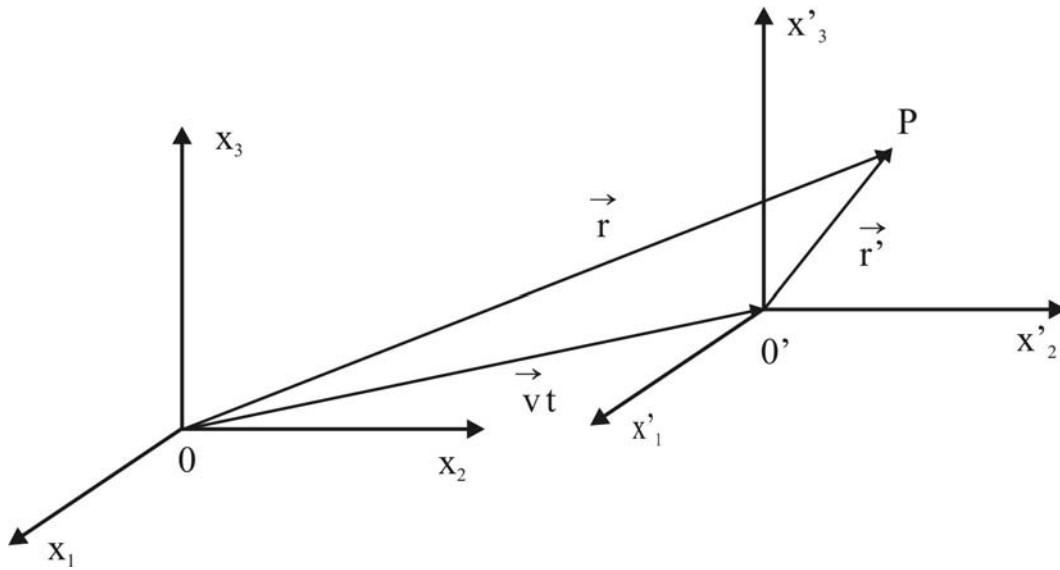


Figura 2-3

Por inspeção, vemos que

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t \quad (2.11)$$

$$t' = t \quad (2.12)$$

As relações acima são conhecidas como Transformação de Galileu. Diferenciando com relação ao tempo a Eq. (2.11), teremos

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \vec{V} \quad (2.13)$$

Caso a partícula tenha um movimento com velocidade constante no referencial O, o mesmo deverá acontecer no referencial O'.

Diferenciando (2.13) em relação a t ,

$$\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} \quad (2.14)$$

A equação acima nos diz que a aceleração será igual nos dois referenciais. Segundo a mecânica newtoniana a massa da partícula tem o mesmo valor qualquer que seja o referencial utilizado, isto é, $M' = M$, de modo que

$$\begin{aligned} M' \ddot{\vec{r}}' &= M \ddot{\vec{r}} \\ \vec{F}' &= \vec{F} \end{aligned} \quad (2.15)$$

que nos diz que a força tem a mesma forma nos dois sistemas de referência, isto é, as Leis de Newton são invariantes por uma Transformação de Galileu, também conhecida como Princípio da Relatividade Newtoniana.

O fato de que as Equações de Maxwell não são invariantes por uma Transformação de Galileu levou ao desenvolvimento da TRE, a ser estudada na disciplina Mecânica Teórica II.

2-6 LEIS DE NEWTON PARA ROTAÇÃO

Na seção 6 do Capítulo 1 vimos que as grandezas deslocamento, velocidade e aceleração têm análogos para o movimento de rotação, que são o deslocamento angular, a velocidade angular e a aceleração angular. Seguindo essa linha, procuraremos o equivalente às Leis de Newton para o movimento de rotação.

Quando aplicamos uma força em uma partícula, provocamos uma aceleração nesta. A grandeza equivalente à força é o torque, que gera uma aceleração angular.

Tornando o produto vetorial do vetor posição $\vec{r}$ pela 2ª Lei de Newton, equação (2.5), teremos

$$\begin{aligned}\vec{r} \times \vec{F} &= \vec{r} \times m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \\ \vec{\tau}_0 &= \vec{r} \times \vec{F}\end{aligned}\tag{2.16}$$

A grandeza definida pela equação (2.16), $\vec{\tau}_0$, é denominada de torque em relação a origem O . O subscrito O na equação (2.16) serve para indicar que o torque é tomado em relação a origem. Mostramos na figura 2-4 a disposição dos vetores.

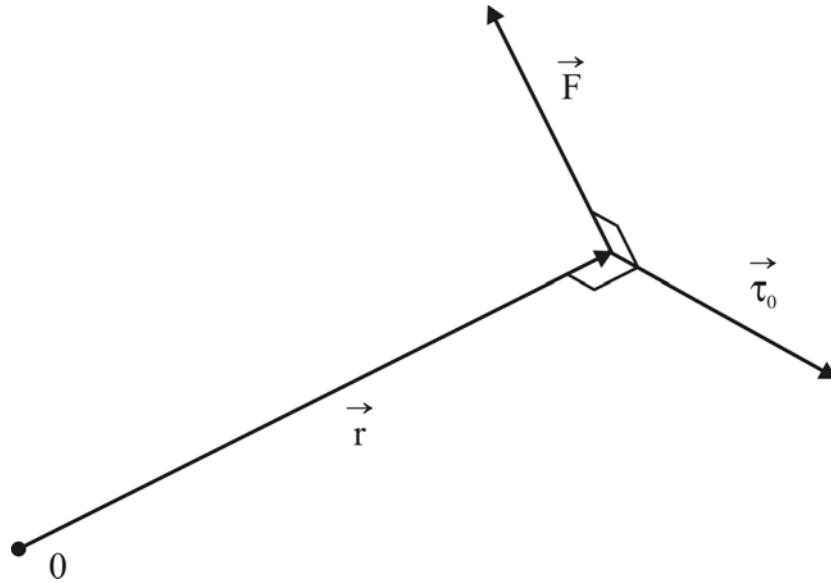


Figura 2-4

Vemos que o torque $\vec{\tau}_0$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{r}$ e $\vec{F}$. Caso o torque seja tomado em relação a um certo ponto A , teremos

$$\vec{\tau}_a = (\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{F}\tag{2.17}$$

Mostramos na figura 2-5 a representação desses vetores

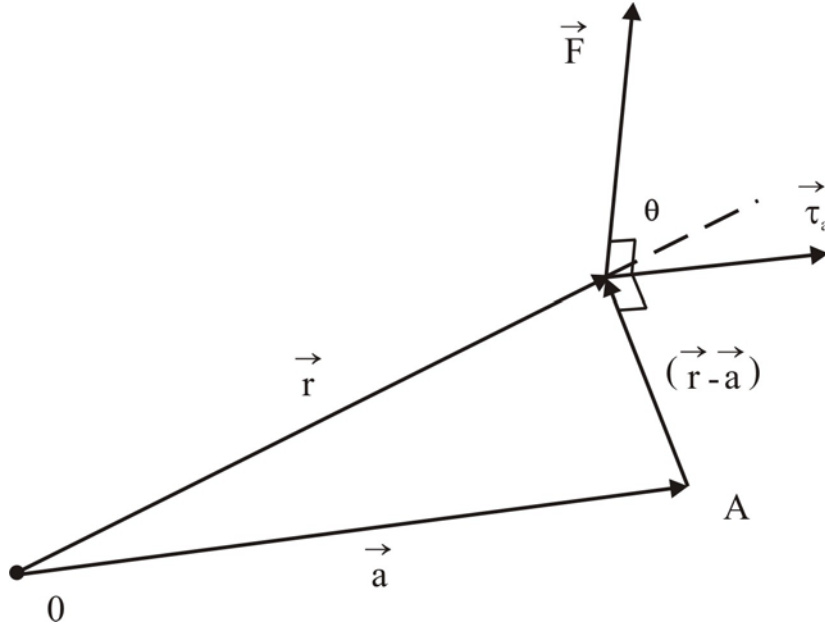


Figura 2-5

Derivando em relação ao tempo o produto vetorial de $\vec{r}$ por $\vec{V}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{V}) &= \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right) \\ &= \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \end{aligned} \quad (2.18)$$

O último termo do segundo membro é nulo, pois $\vec{A} \times \vec{A} = 0$. Multiplicando (2.18) pela massa (M) da partícula, aqui considerada constante, temos

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times M \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{r} \times M \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (2.19)$$

Usando as equações (2.4) e (2.5) em (2.19),

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.20)$$

Tomando a equação (2.16) e definindo o momento angular em relação a origem como,

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{P} \quad (2.21)$$

podemos escrever (2.20) da forma

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_o = \vec{\tau}_o \quad (2.22)$$

A equação acima pode ser pensada com a “*Lei de Newton para a rotação*”.

2-7 TRABALHO, ENERGIA E OS TEOREMAS DE CONSERVAÇÃO

Introduziremos nesta seção as definições de trabalho e energia. Utilizando essas definições, discutiremos um dos temas centrais deste capítulo - os Teoremas de Conservação de Energia, Momento e Momento Angular.

Consideremos uma partícula que se move em um campo de força de um ponto A ao ponto B, conforme a figura 2-6.

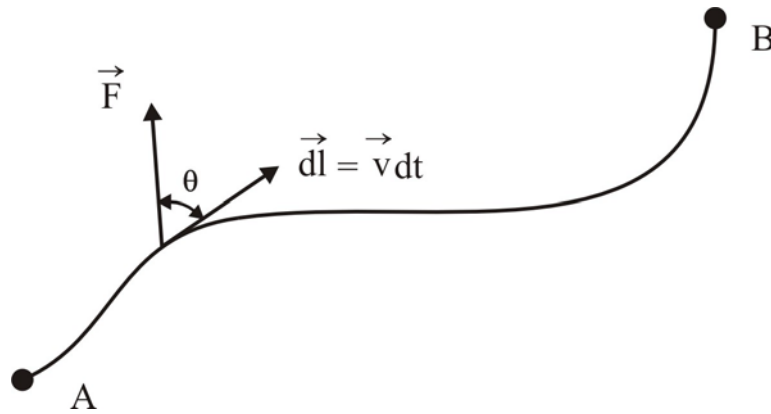


Figura 2-6

$\vec{F}$ é a força no ponto considerado e $d\vec{\ell}$ o deslocamento infinitesimal. Definimos o trabalho infinitesimal dW necessário para deslocarmos a partícula de uma distância $d\vec{\ell}$ quando sujeita a uma força $\vec{F}$ como

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.23)$$

Utilizando a equação (2.5) em (2.23), e observando que

$$d\vec{\ell} = \vec{V} dt \quad (2.24)$$

podemos escrever que

$$\begin{aligned} dW &= M \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} dt \\ &= \frac{M}{2} \left[\frac{d}{dt} (\vec{V} \cdot \vec{V}) \right] dt \\ &= d \left(\frac{1}{2} M V^2 \right) \\ &= dT \end{aligned} \quad (2.25)$$

em que

$$T = \frac{1}{2} M V^2 \quad (2.26)$$

é a energia cinética da partícula. Isto é, a energia associada ao movimento da partícula.

Integrando a equação (2.23), podemos calcular o trabalho necessário para deslocarmos a partícula no intervalo considerado

$$\begin{aligned}\int dW &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_A^B dT \\ W &= T_B - T_A\end{aligned}\tag{2.27}$$

Isto é, o trabalho realizado para deslocarmos a partícula do ponto A ao ponto B é igual a variação de energia cinética entre esses pontos. Em termo das componentes da força e do deslocamento, podemos escrever (2.23) como

$$\begin{aligned}dW &= \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \sum_{j=1}^3 F_j \hat{e}_j \cdot \sum_{k=1}^3 dx_k \hat{e}_k \\ &= \sum_{j,k} F_j dx_k (\hat{e}_j \cdot \hat{e}_k) \\ dW &= \sum_{j,k} F_j dx_k \delta_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^3 F_j dx_j\end{aligned}\tag{2.28}$$

$$= F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$$

$$dW = dW_1 + dW_2 + dW_3\tag{2.29}$$

Aqui, dW_1 , dW_2 e dW_3 representam os trabalhos realizados por cada uma das componentes da força $\vec{F}$, F_1, F_2 e F_3 , respectivamente.

Para o caso em que uma partícula move-se em movimento circular de raio r , onde a força aplicada na partícula faz um ângulo φ com o deslocamento infinitesimal $d\vec{\ell}$, associado ao deslocamento angular infinitesimal $d\theta$, o trabalho será dado por

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}\tag{2.23}$$

Utilizando a equação (1.87) temos

$$dW = \vec{F} \cdot (d\vec{\theta} \times \vec{r})\tag{2.30}$$

Pela identidade vetorial

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

a equação (2.30) poderá ser escrita como

$$dW = d\vec{\theta} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) \quad (2.31)$$

Substituindo na equação acima a definição de torque, equação (2.16),

$$\begin{aligned} dW &= d\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}_0 \\ dW &= \vec{\tau}_0 \cdot d\vec{\theta} \end{aligned} \quad (2.32)$$

O trabalho total é obtido pela integração da equação anterior no intervalo considerado

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau}_0 \cdot d\vec{\theta} \quad (2.33)$$

Em geral, o trabalho realizado por uma força depende do caminho ao longo do qual este é realizado. Quando o trabalho realizado entre dois pontos, digamos A e B , é o mesmo para qualquer curva entre esses pontos, dizemos que essa força é conservativa. A independência do caminho é matematicamente representada pela equação seguinte

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (2.34)$$

O símbolo $\oint_c$ significa que a integral é feita num percurso fechado ao longo da curva c .

Pelo Teorema de Stokes,

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_s \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot dS \quad (2.35)$$

A letra s no símbolo da integral indica que a integral é de superfície; $\hat{n}$ é o vetor unitário normal ao elemento de superfície dS e nabla ($\vec{\nabla}$), o gradiente. Em coordenadas cartesianas, o gradiente é escrito como

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \hat{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \vec{\nabla} &= \sum_i \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2.36)$$

O produto vetorial do gradiente com um vetor recebe o nome de rotacional (rot).

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \quad (2.37)$$

O rotacional do gradiente é identicamente nulo, isto é,

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0 \quad (2.38)$$

Aplicando o Teorema de Stokes na equação (2.34),

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_s \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot dS = 0 \quad (2.39)$$

A equação (2.39) será sempre verdadeira caso a força $\vec{F}$ seja escrita da forma

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

onde V é uma grandeza escalar denominada de energia potencial. De (2.39) e (2.23), vemos que

$$W_{A \rightarrow B} = -\int_A^B \vec{\nabla}V \cdot d\vec{\ell} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} &= -\int_A^B dV \\ &= V_A - V_B \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde os índices A e B indicam a energia potencial no ponto considerado. De (2.41) e (2.27), temos que:

$$\begin{aligned} T_B - T_A &= V_A - V_B \\ V_A + T_A &= V_B + T_B \end{aligned} \quad (2.42)$$

A equação acima nos diz que a soma das energias cinética e potencial em qualquer ponto é constante e expressa o Princípio de Conservação da Energia. Podemos concluir que para forças conservativas, isto é, forças que obedecem à equação (2.40), a energia total da partícula ($V + T$) é conservada.

Uma outra forma de analisarmos esse nosso problema é obtido da seguinte forma: Seja E a energia total do sistema

$$E = T + V \quad (2.43)$$

Tomemos a derivada temporal da equação acima

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} \quad (2.44)$$

Utilizando (2.5) e (2.25), temos que

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \\ \frac{dW}{dt} &= \vec{F} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} \\ \vec{F} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} &= \frac{dT}{dt} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Consideremos agora que o potencial V seja função da posição r e do tempo t .

$$V = V(\vec{r}, t)$$

No sistema de coordenadas cartesianas, sua derivada temporal será

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \\
&= \vec{\nabla} V \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Substituindo (2.46) e (2.45) em (2.44),

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \vec{F} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} + \vec{\nabla} V \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \\
\frac{dE}{dt} &= (\vec{F} + \vec{\nabla} V) \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Caso a força seja conservativa

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \tag{2.40}$$

e o potencial não dependa explicitamente do tempo,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{2.48}$$

a equação (2.47) nos diz que

$$\frac{dE}{dt} = 0 \tag{2.49}$$

isto é, a energia total não varia com o tempo, permanecendo constante em todos os pontos.

Procuraremos obter uma relação envolvendo o momento angular e o torque.

Da equação (2.16) e (2.3)

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2.16}$$

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{2.50}$$

Derivando o produto vetorial $\vec{r} \times \vec{P}$ em relação ao tempo,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{2.51}$$

O 1º termo do 2º membro é nulo

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{V} \\
&= m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = 0
\end{aligned} \tag{2.52}$$

logo,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{2.53}$$

Sendo assim, a equação (2.50) será escrita da forma

$$\vec{\tau}_0 = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{P}) \quad (2.54)$$

$$\vec{\tau}_0 = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (2.55)$$

Analisando a equação (2.55), vemos que se o torque é nulo, o momento angular se conserva.

2-8 SISTEMA DE PARTÍCULAS

Até aqui estudamos o movimento de uma única partícula. Nesta seção faremos a generalização das leis e conceitos de forma a tratar sistemas de muitas partículas que interagem entre si. Utilizando um sistema de referência no centro de massa (CM), discutiremos o problema acima mencionado.

Consideremos um sistema de n partículas sujeito a ação de forças internas e externas. As forças internas representam as forças de interação entre as partículas e forças externas as forças exercidas por agentes externos ao sistema. Sejam $m_1, m_2, \dots, m_n$ a massa; $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_n(t)$ o vetor posição dessas partículas; $\vec{F}_{i(j)}$ a força interna sobre a partícula i devido a partícula j e $\vec{F}_i^{EXT}$ a resultante das forças externas sobre a partícula i . Da 3ª Lei de Newton

$$\vec{F}_{i(j)} = -\vec{F}_{j(i)} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.56)$$

Aplicando a 2ª Lei de Newton à partícula 1, teremos

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{1(2)} + \vec{F}_{1(3)} + \dots + \vec{F}_{1(n)} + \vec{F}_1^{EXT} \quad (2.57)$$

Para a partícula 2

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{2(1)} + \vec{F}_{2(3)} + \dots + \vec{F}_{2(n)} + \vec{F}_2^{EXT} \quad (2.58)$$

De forma geral, podemos escrever a equação para uma partícula genérica i da forma

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{i(j)} + \vec{F}_i^{EXT} \quad (2.59)$$

Observe que a partícula i ou j não exerce força sobre ela mesma, isto é, i é sempre diferente de j . Somando as equações de movimento para todas as n partículas, teremos

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{i(j)} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{EXT} \quad (2.60)$$

Como

$$\vec{F}_{i(j)} = -\vec{F}_{j(i)} \quad (2.61)$$

então

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \vec{F}_{i(j)} = 0 \quad (2.62)$$

Representaremos o somatório das forças externas sobre todas as partículas como a força externa resultante $\vec{F}^{EXT}$,

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{EXT} = \vec{F}^{EXT} \quad (2.63)$$

e por M , a massa total do sistema

$$\sum_{i=1}^n m_i = M \quad (2.64)$$

Assim, podemos escrever a equação (2.60) da forma

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}^{EXT} \quad (2.65)$$

Multiplicando e dividindo o 1º membro da equação acima por $\sum_{i=1}^n m_i$, e considerando a massa constante,

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \frac{1}{\sum_{i=1}^n m_i} = \vec{F}^{EXT} \quad (2.66)$$

podemos escrever a equação acima como

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{EXT} \quad (2.67)$$

onde

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (2.68)$$

é denominado de raio do centro de massa do sistema, ou simplesmente centro de massa.

Observando a equação (2.67), vemos que o centro de massa do sistema move-se como uma única partícula cuja massa é a massa total do sistema, submetida a uma força igual à força externa resultante que age sobre o sistema.

Para uma distribuição contínua de massa, devemos substituir o somatório pela integral na equação (2.68), isto é,

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad (2.69)$$

Tomemos o mesmo sistema de partículas anterior, representado na Figura 2-7.

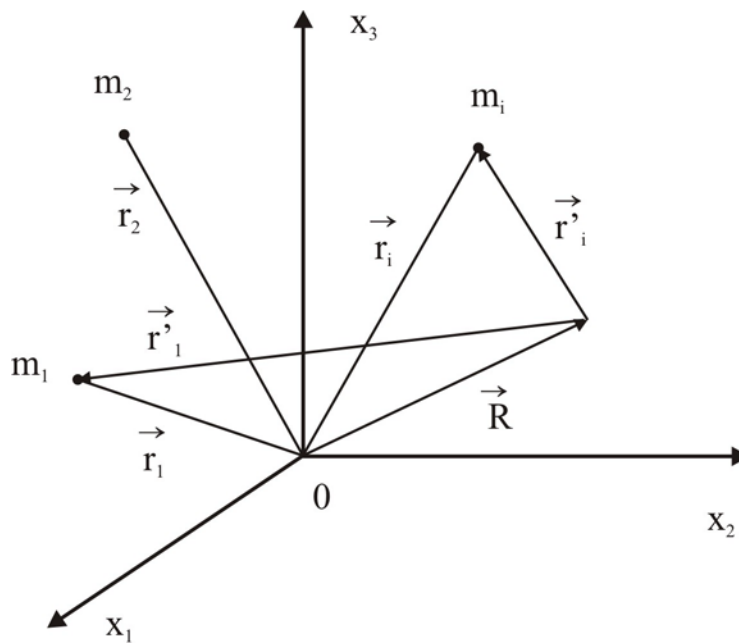


Figura 2-7

onde $\vec{r}'_i$ representa o vetor posição da partícula i em relação ao centro de massa do sistema

$\vec{R}$. Da figura 2-7, vemos que

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R} \quad (2.70)$$

Tomemos o produto de $\vec{R}$ por M

$$\begin{aligned} \vec{R}M &= \vec{R} \sum_{i=1}^n m_i \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{R} \end{aligned}$$

$$\vec{R}M = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\vec{R}M = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (2.71)$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) = 0 \quad (2.72)$$

Usando (2.70), a equação acima é escrita como

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i' = 0 \quad (2.73)$$

Derivando (2.73) em relação ao tempo,

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_i' = 0 \quad (2.74)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{P}_i' = 0$$

que nos mostra que o momento total do sistema relativo ao centro de massa é nulo.

Da equação (2.71), temos que

$$\vec{R} \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (2.71)$$

Derivando a equação acima em relação ao tempo,

$$\frac{d\vec{R}}{dt} \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$M \frac{d\vec{R}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$$

$$M \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{P} \quad (2.76)$$

onde $\vec{P}$ é o momento total do sistema. Tomando a derivada temporal da equação (2.76)

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{EXT} \quad (2.77)$$

isto é, a taxa de variação no tempo do momento total de um sistema de partículas é igual a força externa resultante que atua no sistema. Caso a força externa resultante seja nula,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad (2.78)$$

o momento total do sistema se conserva.

Vejam agora o que acontece com o momento angular de um sistema de partículas. Na figura 2-8, cada uma das partículas i do sistema tem vetor posição $\vec{r}_i$, massa m_i e velocidade $\vec{V}_i$.

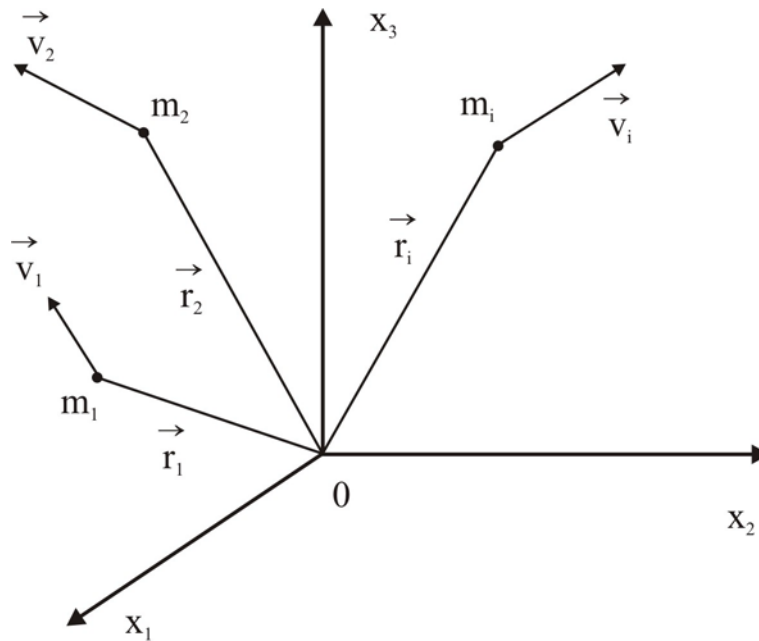


Figura 2-8

O momento angular da partícula i é dado pela equação (2.21)

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{P}_i \quad (2.21)$$

Fazendo o somatório sobre todas as partículas do sistema, teremos o momento angular total

$\vec{L}_T$

$$\vec{L}_T = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i \quad (2.79)$$

$$\vec{L}_T = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \vec{V}_i \quad (2.80)$$

Da equação (2.70)

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i' \quad (2.70)$$

Derivando em relação ao tempo,

$$\vec{V}_i = \vec{V} + \vec{V}'_i \quad (2.81)$$

onde $\vec{V}$ é a velocidade do centro de massa em relação ao sistema de referência.

Substituindo (2.81) e (2.70) em (2.80)

$$\begin{aligned} \vec{L}_T &= \sum_i m_i (\vec{R} + \vec{r}_i) \times (\vec{V} + \vec{V}'_i) \\ &= \sum_i m_i \vec{R} \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{R} \times \vec{V}'_i + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{V}'_i \end{aligned} \quad (2.82)$$

Das equações (2.74) e (2.73), vemos que o segundo e o terceiro termo do 2º membro da equação anterior são nulos. Assim, (2.82) ficará

$$\begin{aligned} \vec{L}_T &= \sum_i m_i \vec{R} \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{V}'_i \\ &= M \vec{R} \times \vec{V} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{P}'_i \\ &= \vec{L}_{CM} + \vec{L}' \end{aligned} \quad (2.83)$$

onde

$$\vec{L}_{CM} = M \vec{R} \times \vec{V} \quad (2.84)$$

é o momento angular do centro de massa em relação a origem do sistema de coordenadas, e

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}'_i \quad (2.85)$$

é o momento angular do sistema de partículas em relação ao centro de massa, também chamado de momento angular interno.

Procuraremos agora, relação análoga a equação (2.55), para um sistema de partículas. Sabemos que

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^n \vec{L}_i \\ \vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{V}_i \end{aligned}$$

Derivando em relação ao tempo, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{V}_i \\ &= \sum_i m_i \cancel{\frac{d\vec{r}_i}{dt}} \times \vec{V}_i + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{V}_i}{dt} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i \end{aligned} \quad (2.86)$$

Caso o referencial seja inercial, podemos utilizar a equação (2.59)

$$m_i \vec{a}_i = \sum_{j=1}^n \vec{F}_{i(j)} + \vec{F}_i^{EXT}$$

em (2.86)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{EXT} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{i(j)} \quad (2.87)$$

Façamos uma análise separada do segundo termo do segundo membro da equação anterior

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{i(j)} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j [\vec{r}_i \times \vec{F}_{i(j)} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{j(i)}] \quad (2.88)$$

Tomando

$$\vec{F}_{j(i)} = -\vec{F}_{i(j)} \quad (2.56)$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{i(j)} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{i(j)} = 0 \quad (2.89)$$

pois $\vec{F}_{i(j)}$ é paralelo a $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$. Assim, (2.87) se reduz a

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{EXT} \\ &= \sum_i \vec{\tau}_i^{EXT} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{\tau}^{EXT} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Se o torque externo resultante for nulo, o momento angular total se conserva.

Caso o referencial seja acelerado, podemos utilizar (2.86) quando referido ao CM. Neste caso

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i' \times \vec{a}_i' \quad (2.91)$$

Derivando em relação ao tempo a equação (2.81)

$$\vec{a}_i = \vec{A} + \vec{a}_i' \quad (2.92)$$

e substituindo em (2.91)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}'}{dt} &= \sum m_i \vec{r}_i' \times (\vec{a}_i - \vec{A}) \\ &= \sum m_i \vec{r}_i' \times \vec{a}_i - \sum m_i \vec{r}_i' \times \vec{A} \end{aligned} \quad (2.93)$$

Da equação (2.73), o último termo do 2º membro é nulo. De (2.59) e (2.93)

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}'}{dt} &= \sum_i \vec{r}_i' \times \left[\vec{F}_i^{EXT} + \sum_j \vec{F}_{i(j)} \right] \\
\frac{d\vec{L}'}{dt} &= \sum_{i=1}^n \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{EXT} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \vec{r}_i' \times \vec{F}_{i(j)} \\
&= \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i'^{EXT}
\end{aligned} \tag{2.94}$$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}'^{EXT} \tag{2.95}$$

Das equações (2.90) e (2.95), vemos que ela permanece válida com respeito ao CM mesmo que este esteja acelerado. Caso o torque externo seja nulo, o momento angular se conserva.

Formularemos o princípio de conservação da energia para um sistema de n partículas.

O trabalho realizado por todas as forças para mover o sistema da configuração 1 para a configuração 2, será dado por

$$W_{12} = \sum_i \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i \tag{2.96}$$

Usando (2.59) na equação acima

$$W_{12} = \sum_i \left[\int_1^2 \vec{F}_i^{EXT} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \cancel{\int \vec{F}_{i(j)} \cdot d\vec{r}_i} \right] \stackrel{=0}{=} \tag{2.97}$$

O Segundo termo é nulo, pois forças internas não realizam trabalho. Assim,

$$\begin{aligned}
W_{12} &= \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{EXT} \cdot d\vec{r}_i \\
&= \sum_i \int m_i \vec{V}_i \cdot \vec{V}_i dt \\
&= \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i V_i^2\right)
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Considerando

$$T_i = \frac{1}{2} m_i V_i^2 \tag{2.99}$$

$$\sum T_i = T \tag{2.100}$$

podemos escrever (2.98) como

$$W_{12} = T_2 - T_1 \tag{2.101}$$

isto é, o trabalho é igual a diferença de energia cinética entre as duas configurações consideradas.

Utilizando (2.99) e (2.100), calcularemos a energia cinética do sistema

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i V_i^2 \quad (2.102)$$

Substituindo (2.81) na equação acima,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{V} + \vec{V}_i') \cdot (\vec{V} + \vec{V}_i') \\ T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{V}_i'^2 + \vec{V} \cdot \sum_i m_i \vec{V}_i' \\ T &= \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{V}_i'^2 \end{aligned} \quad (2.103)$$

Essa equação nos diz que a energia cinética de um sistema de partículas é igual a soma da energia cinética de uma partícula com massa igual a massa total do sistema (M) movendo-se com a velocidade do CM mais a energia cinética do movimento das partículas do sistema relativo ao centro de massa.

Sabemos que

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{EXT} \cdot d\vec{r}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \int_1^2 \vec{F}_{i(j)} \cdot d\vec{r}_i \quad (2.97)$$

Considerando que as forças sejam conservativas, isto é,

$$\vec{F}_i^{EXT} = -\vec{\nabla}_i V_i \quad (2.104)$$

$$\vec{F}_{i(j)} = -\vec{\nabla}_i V_{ij} \quad (2.105)$$

O índice i indica que o gradiente atua nas coordenadas de $\vec{r}_i$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{EXT} \cdot d\vec{r}_i &= - \sum_i \int \vec{\nabla}_i V_i \cdot d\vec{r}_i \\ &= - \sum_i V_i|_1^2 \end{aligned} \quad (2.106)$$

Vejamos agora o segundo termo de (2.97)

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \int_1^2 \vec{F}_{i(j)} \cdot d\vec{r}_i = - \sum_i \sum_{j \neq i} \int \vec{\nabla}_i V_{ij} \cdot d\vec{r}_i \quad (2.107)$$

Como

$$V_{ij} = V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (2.108)$$

$$\vec{\nabla}_i V_{ij} = -\vec{\nabla}_j V_{ij} \quad (2.109)$$

substituindo (2.109) e (2.105) em (2.107)

$$\sum_{i \neq j} \int \vec{F}_{i(j)} \cdot d\vec{r}_i = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int [\vec{\nabla}_i V_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{\nabla}_j V_{ij} \cdot d\vec{r}_j] \quad (2.110)$$

e introduzindo a notação

$$\vec{\nabla}_i V_{ij} = \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} \quad (2.111)$$

$$\vec{\nabla}_i V_{ij} = -\vec{\nabla}_j V_{ij} \quad (2.112)$$

$$d\vec{r}_i - d\vec{r}_j = d\vec{r}_{ij}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \int \vec{F}_{i(j)} \cdot d\vec{r}_i &= -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int \vec{\nabla}_{ij} V_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} \Big|_1^2 \end{aligned} \quad (2.113)$$

De (2.113) e (2.106), teremos que

$$V = -\sum_i V_i \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij} \Big|_1^2 \quad (2.114)$$

$$= V_1 - V_2 \quad (2.115)$$

isto é,

$$W_{12} = T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

$$T_2 + V_2 = T_1 + V_1 \quad (2.116)$$

$$E_2 = E_1 \quad (2.117)$$

onde

$$E = T + V \quad (2.118)$$

é a energia total do sistema de partículas. A equação (2.117) nos diz que a energia total do sistema se conserva.

INTEGRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

3-1 INTRODUÇÃO

Os objetivos deste capítulo são:

- a) Resolver a equação de movimento de uma partícula para alguns casos especiais de força: força constante, força dependente do tempo, força dependente da velocidade e força dependente da posição;
- b) Utilizar as Leis de Newton em sistemas com massa variável no tempo.

De forma geral, abordaremos os problemas da seguinte forma:

- 1 - Escreveremos a equação em um sistema adequado de coordenadas

$$M \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (3.1)$$

- 2 - Integraremos a equação de movimento;

3 - Aplicaremos as condições iniciais, isto é, determinaremos as constantes de integração;

- 4 - Faremos uma análise de nossa solução.

Devemos observar que mesmo não sabendo resolver o problema de forma analítica, podemos analisá-lo de forma qualitativa, descrevendo os movimentos possíveis, caso o potencial seja função da posição.

3-2 MOVIMENTO SOB A AÇÃO DE UMA FORÇA CONSTANTE

Próximo a Terra, todos os corpos movem-se sob a ação da força gravitacional. Consideraremos aqui a Terra como um referencial inercial e que a força de resistência do ar seja desprezível. Isto é, apenas a força gravitacional atua sobre o corpo. Dentro dessa expectativa, analisaremos o movimento de um projétil de massa m que é lançado com velocidade v_0 em uma direção formando um ângulo α com a horizontal, conforme mostra a figura 3-1.

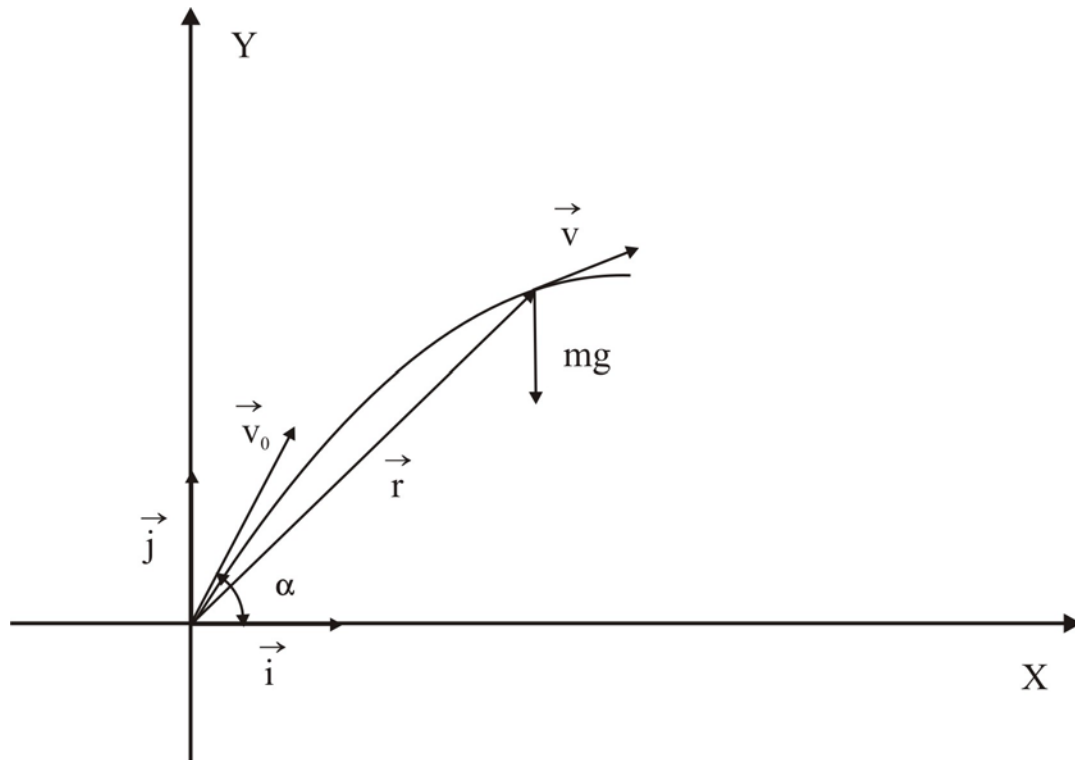


Figura 3-1

Determinaremos os seguintes parâmetros:

- o vetor posição;
- o tempo que a partícula leva para chegar ao ponto mais alto da trajetória;
- a altura máxima atingida;
- o tempo total de permanência no ar;
- o alcance máximo;
- a equação da trajetória.

Solução:

- O vetor posição

Devemos em primeiro lugar escrever a equação de movimento

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -mg \vec{j} \quad (3.2)$$

onde

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad (3.3)$$

Integrando a equação (3.2) em relação ao tempo,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -g t \vec{j} + \vec{c}_1 \quad (3.4)$$

Aplicando a condição inicial de que em $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_o$, tem-se que

$$\vec{c}_1 = \vec{v}_o = v_{ox} \vec{i} + v_{oy} \vec{j} \quad (3.5)$$

$$\vec{c}_1 = v_o \cos \alpha \vec{i} + v_o \sin \alpha \vec{j} \quad (3.6)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = v_o \cos \alpha \vec{i} + (v_o \sin \alpha - gt) \vec{j} \quad (3.7)$$

$$= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \quad (3.8)$$

em que

$$v_x = v_o \cos \alpha = v_{ox} \quad (3.9)$$

$$v_y = v_o \sin \alpha - gt = v_{oy} - gt \quad (3.10)$$

Integrando novamente a equação (3.7), teremos

$$\vec{r} = v_o \cos \alpha \vec{i} + \left[v_o \sin \alpha t - g \frac{t^2}{2} \right] \vec{j} + \vec{c}_o \quad (3.11)$$

Aplicando a condição inicial de que em $t = 0$, $\vec{r} = 0$

$$\vec{c}_o = 0 \quad (3.12)$$

assim,

$$\vec{r} = v_o \cos \alpha \vec{i} + \left[v_o \sin \alpha t - g \frac{t^2}{2} \right] \vec{j} \quad (3.13)$$

$$= x \vec{i} + y \vec{j} \quad (3.14)$$

isto é,

$$x = v_o \cos \alpha t \quad (3.15)$$

$$x = v_{ox} t \quad (3.16)$$

$$y = \left[v_o \sin \alpha t - g \frac{t^2}{2} \right] \quad (3.17)$$

$$y = \left[v_{oy} t - g \frac{t^2}{2} \right] \quad (3.18)$$

Das equações (3.16) e (3.18), vemos que o movimento é a composição de um MRU na direção $\vec{i}$ com um MRUV (queda livre) na direção $\vec{j}$.

b) Seja t_s o tempo que a partícula gasta para chegar ao ponto mais alto da trajetória. Nesse ponto, a componente y da velocidade se anula. De (3.10),

$$v_y = v_o \sin \alpha - gt_s = 0 \quad (3.19)$$

$$t_s = \frac{v_o}{g} \sin \alpha \quad (3.20)$$

$$t_s = \frac{v_{oy}}{g}$$

c) A altura máxima ($h_{\max}$) será atingida quando $t = t_s$

$$\begin{aligned} y &= h_{\max} \\ &= v_o \sin \alpha t_s - \frac{g}{2} t_s^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} &= v_o \sin \alpha \frac{v_o \sin \alpha}{g} - \frac{g}{2} \left(\frac{v_o \sin \alpha}{g} \right)^2 \\ &= \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2g} \\ &= \frac{1}{2} \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{g} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{v_{oy}^2}{g} \quad (3.23)$$

d) O tempo de permanência no ar t_t é obtido fazendo-se $y = 0$, com $t \neq 0$. De (3.17)

$$\left(v_o \sin \alpha - \frac{g}{2} t_t \right) t_t = 0 \quad (3.24)$$

$$v_o \sin \alpha - \frac{g}{2} t_t = 0 \quad (3.25)$$

$$t_t = \frac{2v_o \sin \alpha}{g} \quad (3.26)$$

De (3.26) e (3.20) vemos que

$$t_t = 2t_s \quad (3.27)$$

Isto é, os tempos de subida e descida, são iguais.

e) O alcance máximo $X_{\max}$ é obtido da equação (3.15) quando $t = t_t$.

$$X_{\max} = v_o \cos \alpha \cdot 2 \frac{v_o \sin \alpha}{g} \quad (3.28)$$

$$X_{\max} = \frac{v_o^2}{g} 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$X_{\max} = \frac{v_o^2}{g} \sin 2\alpha \quad (3.29)$$

De (3.29), vemos que o alcance máximo é obtido para o ângulo onde

$$\sin 2\alpha = 1 \quad (3.30)$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad (45^\circ) \quad (3.31)$$

f) Para obtermos a equação da trajetória, devemos substituir o valor de t da equação (3.15) na equação (3.18)

$$t = \frac{x}{v_o \cos \alpha} \quad (3.32)$$

$$y = v_o t \sin \alpha - g \frac{t^2}{2} \quad (3.33)$$

$$= v_o \frac{x \sin \alpha}{v_o \cos \alpha} - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_o^2 \cos^2 \alpha}$$

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2} \frac{x^2}{(v_o \cos \alpha)^2} \quad (3.34)$$

que é a equação de uma parábola.

3-3 MOVIMENTO SOB A AÇÃO DE UMA FORÇA DEPENDENTE DO TEMPO

A equação de movimento para uma partícula sob a ação de uma força $\vec{F}(t)$, será dada por

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \vec{F}(t) \\ m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{F}(t) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Integrando em relação ao tempo, e observando que em $t = t_o$, $\vec{v} = \vec{v}_o$, teremos

$$m(\vec{v}')_{\vec{v}_o}^{\vec{v}} = \int_{t_o}^t \vec{F}(t') dt' \quad (3.36)$$

$$m(\vec{v} - \vec{v}_o) = \int_{t_o}^t \vec{F}(t') dt' \quad (3.37)$$

$$\vec{P} - \vec{P}_o = \int_{t_o}^t \vec{F}(t') dt' \quad (3.38)$$

Integrando (3.37) em relação ao tempo e considerando que em $t = t_o$, $\vec{r} = \vec{r}_o$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_o(t_o) = \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{m} \int_{t_o}^t dt' \int_{t_o}^{t'} \vec{F}(t'') dt'' \quad (3.39)$$

Sabendo a forma analítica de $\vec{F}(t)$, podemos resolver a integral explicitamente ou, na pior das hipóteses, por integração numérica.

Faremos uma aplicação para o caso das ondas de rádio que são refletidas e/ou transmitidas pela ionosfera terrestre. A ionosfera é constituída de elétrons e íons, que são dissociados pela ação da luz ultravioleta do Sol, quando absorvida por átomos e moléculas na atmosfera superior. Devido ao campo magnético da Terra, essas partículas são aprisionadas, formando a ionosfera. O movimento de partículas em um campo magnético será abordado na próxima seção.

Quando ondas de rádio propagam-se na ionosfera, os elétrons, por serem mais leves, são mais acelerados pelo campo elétrico do que os íons. Assim, podemos tratar a ionosfera, em primeira aproximação, como um gás de elétrons com baixa densidade.

A equação de movimento unidimensional de um elétron em um campo elétrico

$$E = E_o \sin \omega t \quad (3.40)$$

é escrita como

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -e E_o \sin \omega t \quad (3.41)$$

onde m é a massa e $-e$ a carga do elétron. Integrando a equação anterior em relação ao tempo,

$$v|_{t_o}^t = + \frac{e E_o}{m \omega} \cos \omega t' \Big|_{t_o}^t \quad (3.42)$$

Para $t_o = 0$, temos que $v(t_o) = v_o$

$$\begin{aligned} v - v_o &= \frac{e E_o}{m \omega} [\cos \omega t - 1] \\ v &= v_o - \frac{e E_o}{m \omega} + \frac{e E_o}{m \omega} \cos \omega t \end{aligned} \quad (3.43)$$

Integrando novamente a equação anterior em relação ao tempo, teremos

$$x|_{t_o}^t = \left(v_o - \frac{eE}{m\omega} \right) t + \frac{eE}{m\omega^2} \sin \omega t \quad (3.44)$$

Para $t = t_o$, $x = x_o$

$$x = x_o + \left(v_o - \frac{eE}{m\omega} \right) t + \frac{eE}{m\omega^2} \sin \omega t \quad (3.45)$$

Da equação anterior, vemos que o movimento é uma composição de um movimento com velocidade constante

$$x_o + \left(v_o - \frac{eE}{m\omega} \right) t \quad (3.46)$$

com um termo oscilante no tempo

$$\frac{eE}{m\omega^2} \sin \omega t \quad (3.47)$$

cuja frequência de oscilação é a mesma frequência da onda incidente. A parte oscilante dá origem a um momento de dipolo $\vec{p}$

$$\vec{p} = \frac{-e^2}{m\omega^2} \vec{E} \quad (3.48)$$

Assim, o elétron é sujeito a ação de dois campos: o campo externo aplicado e o campo interno, causado pelos momentos de dipolo produzido pelos outros elétrons. Considerando que a densidade de elétrons N é muito pequena, podemos negligenciar a última contribuição para o campo. Assim, a polarização macroscópica $\vec{P}$, será dada por

$$\begin{aligned} \vec{P} &= N\vec{p} \\ &= -\frac{Ne^2}{m\omega^2} \vec{E} \end{aligned} \quad (3.49)$$

A análise do índice de refração do gás de elétrons

$$n = c/v \quad (3.50)$$

em que c é a velocidade da luz no vácuo

$$c = 1/\sqrt{\mu_o \epsilon_o} \quad (3.51)$$

e v é a velocidade da onda no meio

$$v = 1/\sqrt{\mu \epsilon} \quad (3.52)$$

nos diz como as ondas de rádio irão se propagar. Aqui, $\mu(\mu_o)$ e $\epsilon(\epsilon_o)$ são os valores da permissividade elétrica e permeabilidade magnética no meio e no vácuo, respectivamente. De (3.50), (3.51) e (3.52), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 n &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_o}} \\
 &= \xi^{1/2}
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

em que ξ é a permissividade relativa, que relaciona $\vec{E}$, $\vec{P}$ e $\vec{D}$ através da equação

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P} \tag{3.54}$$

$$= \epsilon \vec{E} \tag{3.55}$$

$$= \xi \epsilon_o \vec{E} \tag{3.56}$$

em que

$$\xi = 1 + \frac{1}{\epsilon_o} \left(\frac{P}{E} \right) \tag{3.57}$$

Usando (3.49) na equação acima

$$\xi = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_o m \omega^2} \tag{3.58}$$

fazendo agora

$$v_p^2 = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \frac{Ne^2}{\epsilon_o m} \tag{3.59}$$

teremos

$$\xi = 1 - \left(\frac{v_p}{v} \right)^2 \tag{3.60}$$

em que $v = \omega/2\pi$. Assim, podemos escrever o índice de refração como

$$n = \left[1 - (v_p/v)^2 \right]^{1/2} \tag{3.61}$$

Da equação acima, vemos que:

- 1) Quando $v = v_p$, ξ e n são iguais a zero;
- 2) $v < v_p$, ξ é negativo e n imaginário.

Faremos agora a análise da propagação das ondas de rádio na ionosfera:

- 1) Se n é real menor que 1 ($v > v_p$), da Lei de Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \tag{3.62}$$

a onda será refratada. Quando $\theta_r = 90^\circ$,

$$\sin \theta_i = n \tag{3.63}$$

Para ângulos $\theta > \theta_i$, a onda será totalmente refletida. Como os contornos da ionosfera não são abruptos, a reflexão ocorre para todos os ângulos de incidência em que

$$\sin \theta_i \geq n_{\min} \quad (3.64)$$

onde $n_{\min}$ é o índice de refração mínimo da ionosfera situado a uma altura cuja densidade de elétrons é máxima.

2) Se n é imaginário ($\nu \leq \nu_p$), não há fluxo nem absorção de energia pela ionosfera. Isto nos leva a conclusão de que a onda será totalmente refletida.

Mostramos na figura 3-2 a representação desses casos.

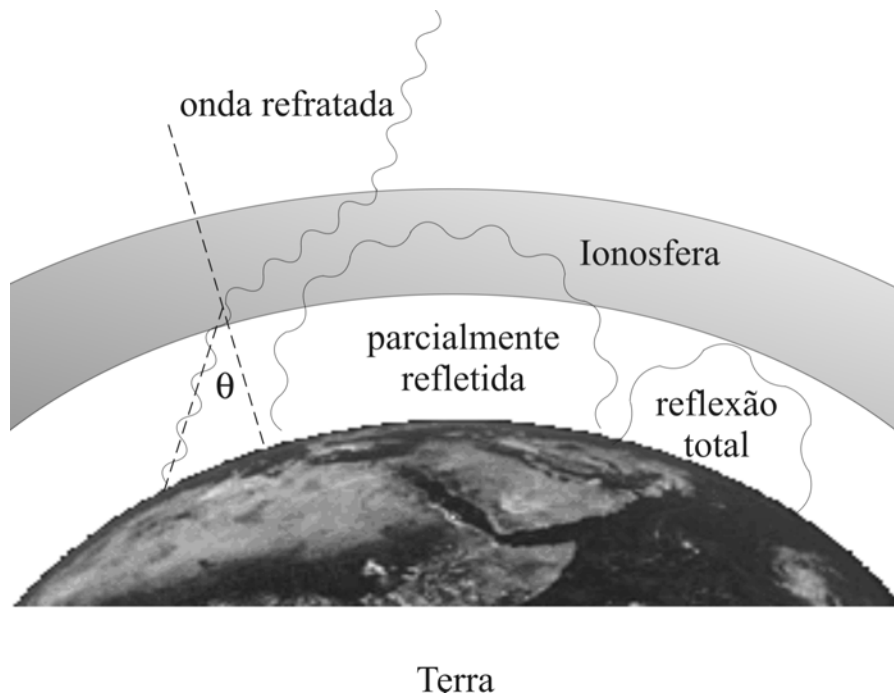


Figura 3-2

Quando $\vec{F} = \vec{F}(t)$, podemos utilizar o método da função de Green. Esse método consiste em representar a força $\vec{F}(t)$ como a soma de forças impulsivas $\vec{F}_n(t)$ que atuam apenas em um pequeno intervalo de tempo Δt , dando um impulso $\vec{F}_n(t)\Delta t$

$$\vec{F}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \vec{F}_n(t) \quad (3.65)$$

Mostramos na figura 3-3 essa representação.

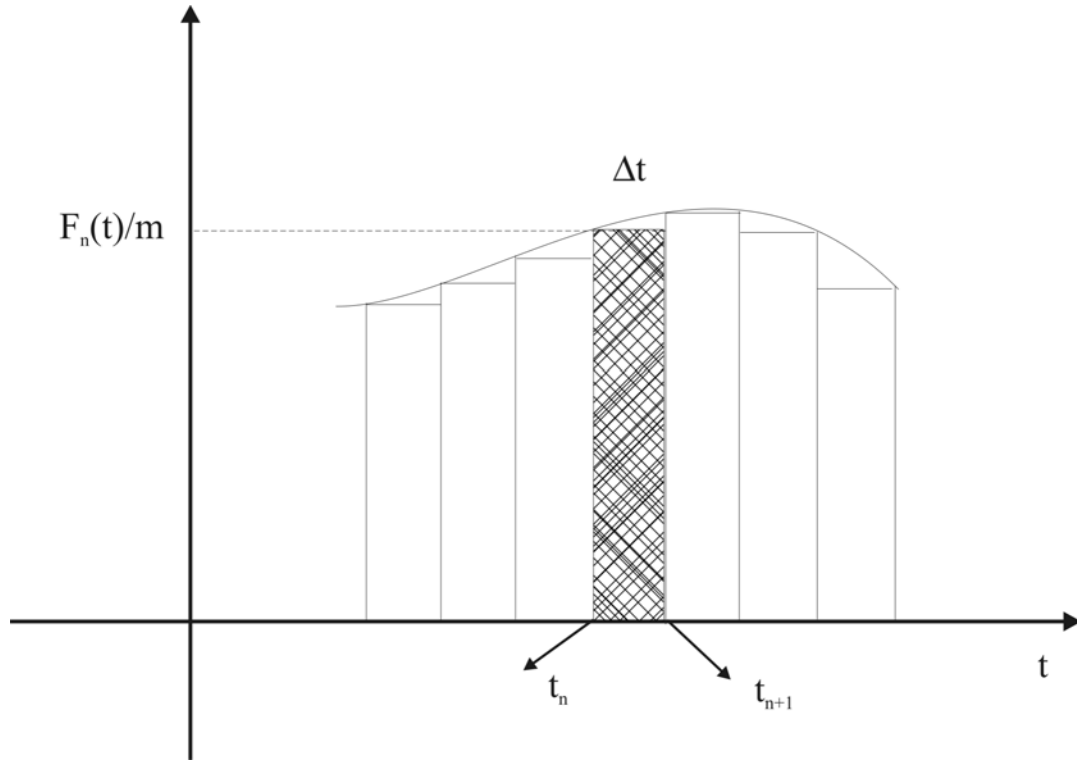


Figura 3-3

Observe que

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_n \\ F_n & \text{se } t_n \leq t < t_{n+1} \\ 0 & \text{se } t > t_{n+1} \end{cases} \quad (3.66)$$

e que

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \quad (3.67)$$

Quando somamos sobre todos os $\vec{F}_n(t)$, fazendo $\Delta t \rightarrow 0$, a força tenderá para $\vec{F}(t)$.

Para exemplificar o método, consideremos uma partícula em repouso no instante $t = 0$. Aplicamos a essa partícula uma força $\vec{F}(t)$. Representaremos $\vec{F}(t)$ por uma série de forças impulsivas e somamos todas as contribuições. Se $\vec{F}_n(t)$ é a força média que atua no intervalo Δt , a velocidade da partícula será dada por

$$v(t, t') = \frac{F_n}{m}(t')\Delta t \quad (3.68)$$

e a posição por

$$x(t, t') = \frac{F_n}{m}\Delta t(t - t') \quad t > t' \quad (3.69)$$

Devido a linearidade do sistema, podemos utilizar o princípio de superposição e, no limite quando $\Delta t \rightarrow 0$, integrarmos em todo o intervalo de tempo, isto é

$$x(t) = \int_0^t \frac{(t-t')}{m} F(t') dt' \quad (3.70)$$

De forma geral, podemos escrever a equação acima como

$$x(t) = \int_0^t G(t,t') F(t') dt' \quad (3.71)$$

onde

$$G(t,t') = \frac{t-t'}{m} \quad (3.72)$$

é denominada de função de Green, propagador ou função resposta. Conhecido $G(t,t')$ e $F(t)$, podemos obter a solução do problema para qualquer instante de tempo t .

3-4 MOVIMENTO SOB A AÇÃO DE UMA FORÇA DEPENDENTE DA VELOCIDADE

Para o caso em que a força é dependente da velocidade, a equação de movimento tem a forma

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{v}) \quad (3.73)$$

Considerando que o sistema seja unidimensional e utilizando a regra da cadeia na equação acima,

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = F(v) \quad (3.74)$$

$$mv \frac{dv}{dx} = F(v) \quad (3.75)$$

De (3.73)

$$dt = m \frac{dv}{F(v)} \quad (3.76)$$

Integrando no intervalo de tempo considerado e considerando que em $t = t_o$, $v = v_o$, teremos

$$\int_{t_o}^t dt' = m \int_{v_o}^v \frac{dv'}{F(v')} \quad (3.77)$$

De (3.75)

$$\int_{x_o}^x dx' = m \int_{v_o}^v \frac{v' dv'}{F(v')} \quad (3.78)$$

$$x - x_o = m \int_{v_o}^v \frac{v' dv'}{F(v')} \quad (3.79)$$

Como exemplo de força dependente da velocidade temos a força de resistência do ar, que com boa aproximação pode ser escrita da forma

$$\vec{F}_R = -mkv^n \frac{\vec{v}}{v} \quad (3.80)$$

onde k é uma constante positiva que leva a dependência de outros fatores que não seja a velocidade, por exemplo: geometria, condições de superfície, etc., e especifica a ordem de grandeza da resistência. Experimentalmente, o valor de n é $\cong 1$ para velocidades abaixo de 24 m/s. Para velocidades maiores que 24 m/s e menores que a velocidade do som ($\cong 330 \text{ m/s}$) o valor de n é $\cong 2$.

Como problema exemplo, trabalharemos o caso do movimento de uma partícula de massa m e carga Q que se move em um campo magnético $\vec{B}$ com velocidade $\vec{v}$. Considerando que haja também nessa região um campo elétrico $\vec{E}$, a força total que atua na partícula é dada pela força de Lorentz

$$\vec{F} = Q [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \quad (3.81)$$

Os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são funções da posição e tempo e os efeitos de interação entre as partículas não serão considerados.

Consideremos o caso onde o campo elétrico é nulo e o campo magnético uniforme. Neste caso, a força de Lorentz será

$$\vec{F} = Q \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.82)$$

Isto é, a força é perpendicular ao plano formado por $\vec{v}$ e $\vec{B}$, o que nos leva a concluir que o trabalho realizado sobre a partícula será nulo, e a energia cinética constante. A equação de movimento da partícula nesse campo será

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.83)$$

Para facilitar a análise do problema dividamos a velocidade em duas componentes, uma paralela e outra perpendicular ao campo magnético.

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \quad (3.84)$$

Substituindo (3.84) em (3.83) teremos

$$\frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \frac{Q}{m} (\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) \times \vec{B}$$

Como

$$\frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = 0 \quad (3.85)$$

então $\vec{v}_{\parallel}$ é constante e

$$(\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}) = 0 \quad (3.86)$$

devido ao fato de que o produto vetorial de vetores paralelos é nulo. Sendo assim,

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \frac{Q}{m} \vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \quad (3.87)$$

$d\vec{v}_{\perp}/dt$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{v}_{\perp}$ e $\vec{B}$. Isto é, a força é uma força centrípeta, e faz com que a partícula mova-se em um círculo, conforme mostra a figura 3-4.

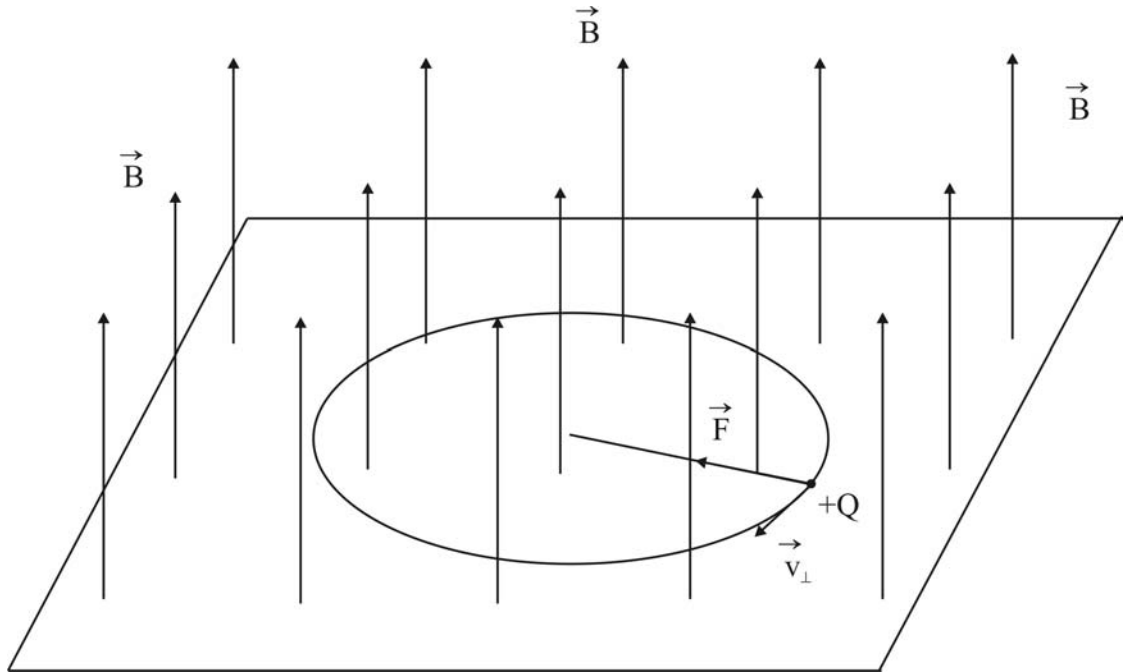


Figura 3-4

Para encontrarmos o raio R do círculo devemos igualar a força de Lorentz à força centrípeta

$$Q v_{\perp} B = \frac{m v_{\perp}^2}{R} \quad (3.88)$$

$$R = \frac{mv_{\perp}}{QB} \quad (3.89)$$

R é denominado de raio de Larmor. O período T do movimento será dado por

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} &= 2\pi R \frac{m}{QRB} \\ &= 2\pi \frac{m}{QB} \end{aligned} \quad (3.91)$$

e a frequência ν

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{T} \\ \nu &= \frac{QB}{2\pi m} \end{aligned} \quad (3.92)$$

A frequência angular de rotação será

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi\nu \\ &= 2\pi \left(\frac{QB}{2\pi m} \right) \\ \omega &= \frac{QB}{m} \end{aligned} \quad (3.93)$$

A frequência dada pela equação (3.93) é denominada de frequência de ciclotron.

Das discussões anteriores, podemos concluir que o movimento em um campo uniforme será a superposição de um movimento de translação devido a $\vec{v}_{\parallel}$ com um movimento circular, devido a $\vec{v}_{\perp}$. A figura 3-5 mostra essa composição

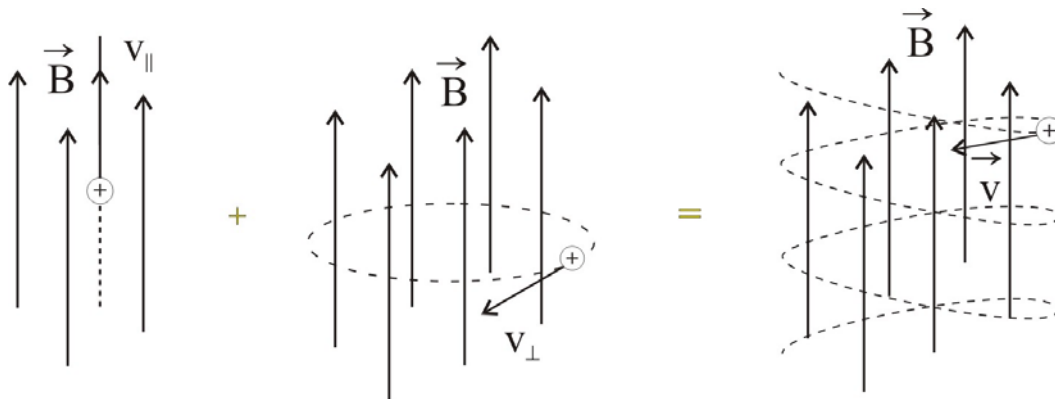


Figura 3-5

Vejamos agora o caso em que $\vec{B}$ é aproximadamente uniforme de forma a ter simetria axial. Neste caso devemos utilizar coordenadas cilíndricas escrevendo $\vec{B}$ da forma

$$\vec{B} = \vec{B}(\rho, z) \quad (3.94)$$

A variação de $\vec{B}$ com ρ e z deve ser pequena. Caso $\vec{B}$ aumente, o raio diminui [equação (3.89)], fazendo com que o movimento da partícula seja aproximadamente helicoidal, conforme mostra a figura 3-6.

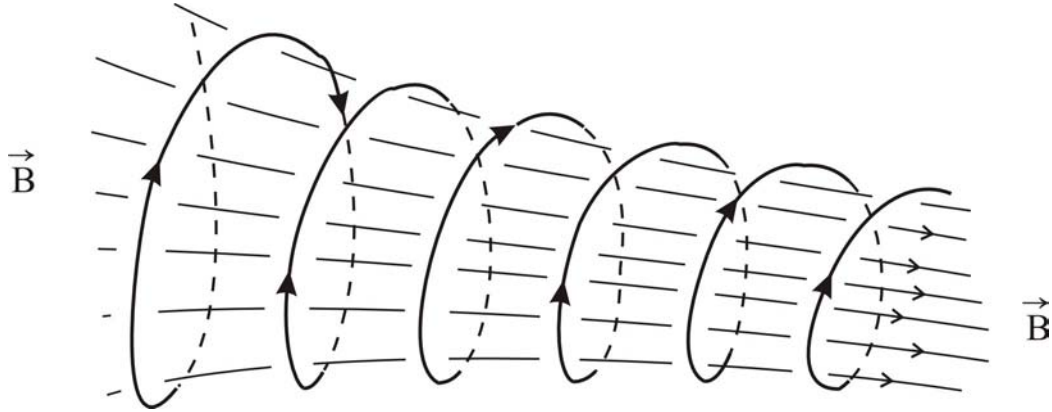


Figura 3-6

Tomando a componente z da equação (3.83), teremos

$$m \frac{dv_z}{dt} = -Q v_\phi B_\rho \quad (3.95)$$

Utilizando o fato que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.96)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) = -\frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (3.97)$$

$$\cong \text{const}$$

Resolvendo (3.97) para B_ρ ,

$$B_\rho = -\frac{1}{2} \rho \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (3.98)$$

Caso o valor de $\vec{B}$ não varie muito em cada volta podemos considerar

$$v_\rho \ll v_\phi \quad (3.99)$$

e

$$v_\phi \cong -v_\perp \quad (3.100)$$

Substituindo (3.100) e (3.98) em (3.95), tem-se

$$m \frac{dv_z}{dt} = -Q(-v_\perp) \left(-\frac{1}{2} \rho \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \quad (3.101)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{2} Q v_\perp \rho \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (3.102)$$

Usando agora a equação (3.89) para o raio ρ , (3.102) pode ser escrita como

$$m \frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{2} Q v_\perp \frac{mv_\perp}{QB} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (3.103)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{mv_\perp^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (3.104)$$

que nos diz que a componente z da força acelera a partícula para a região onde o campo é mais fraco. Partículas que giram e se aproximam da região de campo mais forte a componente $v_\parallel$ diminui e $v_\perp$ aumenta. Caso a convergência do campo seja suficientemente grande, a partícula será refletida para a região onde o campo é mais fraco. Esse efeito é conhecido como espelho magnético e serve para explicar a formação do anel de Van Allen na ionosfera.

3-5 MOVIMENTO SOB A AÇÃO DE UMA FORÇA DEPENDENTE DA POSIÇÃO

Caso a força seja dependente da posição, a equação de movimento será da forma

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}) \quad (3.105)$$

Tomando o produto escalar da equação acima com

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt \quad (3.106)$$

Teremos

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.107)$$

Integrando de t_o a t e considerando que em $t = t_o$, $\vec{r} = \vec{r}_o$ e $\vec{v} = \vec{v}_o$

$$m \int_{t_o}^t \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_o}^t \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned}\frac{m}{2} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_{v_0}^v &= \int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \frac{m}{2} (v^2 - v_0^2) &= \int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r}\end{aligned}\quad (3.109)$$

Caso $\vec{F}$ seja conservativa

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\nabla} V \\ \frac{m}{2} (v^2 - v_0^2) &= - \int_{r_0}^r \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} \\ \frac{m}{2} (v^2 - v_0^2) &= - \int_{r_0}^r dV \\ \frac{m}{2} (v^2 - v_0^2) &= V(r_0) - V(r)\end{aligned}\quad (3.110)$$

$$\begin{aligned}\frac{mv^2}{2} + V(r) &= \frac{mv_0^2}{2} + V(r_0) \\ &= E \\ &= \text{constante}\end{aligned}\quad (3.111)$$

Isto é, a energia total do sistema,

$$E = T + V \quad (3.112)$$

é constante. Da equação (3.111),

$$\frac{mv^2}{2} + V(r) = E$$

Resolvendo para v , teremos

$$\begin{aligned}v^2 &= \frac{2}{m} [E - V(r)] \\ v &= \left\{ \frac{2}{m} [E - V(r)] \right\}^{1/2}\end{aligned}\quad (3.113)$$

Da equação anterior, podemos fazer uma análise qualitativa do problema. A figura 3-7 mostra um potencial genérico $V(x)$, onde temos uma partícula com energia E . Vemos que para $E < V$ (regiões entre x_0 e x_2 , e x_4 e x_6) o movimento não é permitido, pois nesses casos a velocidade seria complexa, o que não é possível. Para $E > V$ a velocidade será real e o movimento permitido. Quando $V(r) = E$ a velocidade v será nula, isto é, a partícula fica instantaneamente em repouso. Após um certo instante de tempo a partícula reverte a

direção da velocidade, voltando a sua posição original. Denominamos estes pontos de pontos de retorno. Caso haja dois pontos de retorno em uma certa região, por exemplo, entre os pontos x_2 e x_4 , dizemos que o movimento é um movimento confinado. Para sistemas unidimensionais, este movimento será também periódico. Caso haja apenas um ponto de retorno, como por exemplo, x_6 , o movimento será não confinado.

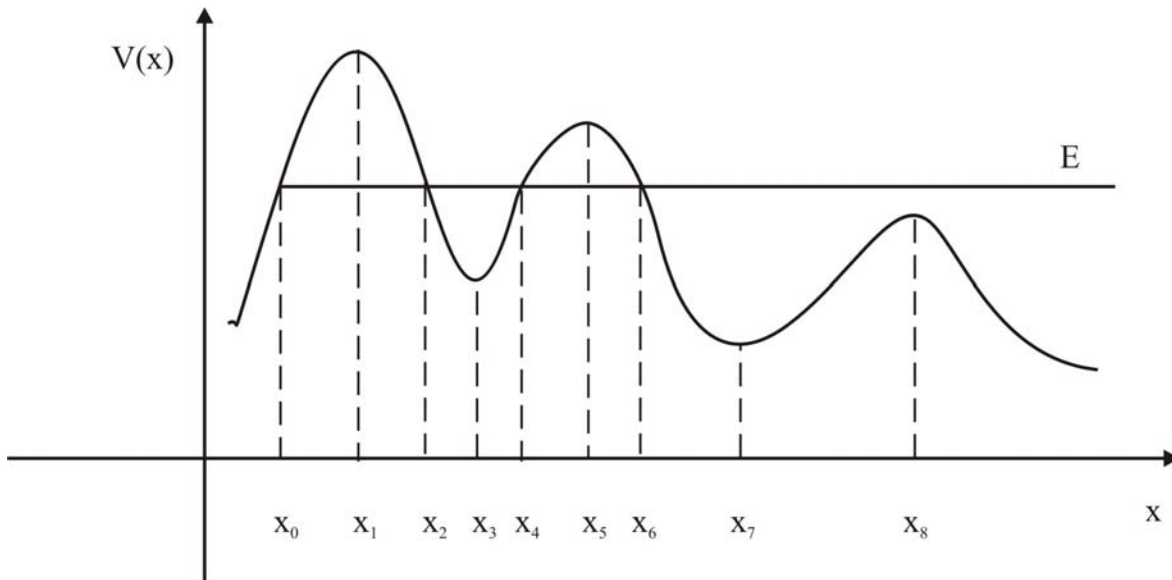


Figura 3-7

As regiões onde classicamente a partícula não pode penetrar e onde o movimento é confinado, são genericamente denominadas de barreira de potencial e poço de potencial, respectivamente. Na disciplina Física Moderna a análise quântica irá modificar nossas conclusões feitas à luz da Mecânica Clássica.

Faremos agora a análise gráfica do potencial, tendo em vista a estabilidade do sistema. Em pontos onde a derivada primeira do potencial se anula, caso a partícula esteja em repouso, continuará em repouso. Denominamos estes pontos de pontos de equilíbrio.

$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad (3.114)$$

Na figura 3-7, esses pontos são x_1 , x_3 , x_5 , x_7 e x_8 . Os pontos de equilíbrio podem ser estáveis e instáveis. Dizemos que é um ponto estável se, ao ser retirado um pouco da posição de equilíbrio, a partícula retornar ou oscilar em torno desse ponto, isto é, quando o potencial tem um mínimo nesse ponto. Caso não haja retorno, dizemos que o ponto é instável. Nessa situação, o potencial deve ter um ponto de máximo. De acordo com o exposto, podemos classificar os pontos x_3 e x_7 como estáveis e x_1 , x_5 e x_8 como instáveis.

Vejam os o que acontece quando retiramos uma partícula de sua posição de equilíbrio x_e . Expandindo o potencial em torno desse ponto, teremos

$$V(x) = V(x_e) + \frac{(x - x_e)}{1!} \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=x_e} + \frac{(x - x_e)^2}{2!} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_e} + \frac{(x - x_e)^3}{3!} \left. \frac{d^3V}{dx^3} \right|_{x=x_e} + \dots \quad (3.115)$$

Como x_e é um ponto de equilíbrio,

$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=x_e} = 0 \quad (3.116)$$

e considerando que o termo de terceira ordem seja pequeno, de forma que possa ser desprezado, o potencial poderá ser escrito como

$$V(x) - V(x_e) = \frac{(x - x_e)^2}{2!} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_e} \quad (3.117)$$

Caso a derivada segunda no ponto de equilíbrio seja positiva, o ponto de equilíbrio será um mínimo e o movimento estável. Caso seja negativo, teremos um máximo e o movimento será instável. Quando é nulo dizemos que o equilíbrio é crítico. Devemos então considerar termos de ordem maior, isto é,

$$V(x) - V(x_e) = \frac{(x - x_e)^3}{3!} \left. \frac{d^3V}{dx^3} \right|_{x=x_e} + \frac{(x - x_e)^4}{4!} \left. \frac{d^4V}{dx^4} \right|_{x=x_e} + \dots \quad (3.118)$$

Se a derivada terceira no ponto de equilíbrio for positiva então $V(x) - V(x_e)$ tem o mesmo sinal que a diferença $(x - x_e)$. Caso a derivada terceira seja negativa, $V(x) - V(x_e)$ terá sinal contrário da diferença $(x - x_e)$. Da análise acima, podemos concluir que $V(x) - V(x_e)$ muda de sinal quando passa em $x = x_e$, isto é, $V(x)$ tem um ponto de inflexão em $x = x_e$ e o equilíbrio é instável.

Podemos generalizar o método descrito anteriormente da seguinte forma:

1. Se a primeira derivada não nula é de ordem ímpar, o equilíbrio é instável, independente do sinal da derivada;
2. Se a primeira derivada não nula é de ordem par, o equilíbrio será estável caso a derivada seja positiva e instável se negativa.

A análise mais aprofundada da estabilidade de sistemas não é o objetivo deste curso.

3-6 SISTEMAS DE MASSA VARIÁVEL NO TEMPO

Nesta seção, abordaremos o problema de sistemas com massa variável no tempo. Essa variação de massa não deve ser confundida com a variação da massa devido à velocidade da partícula, isto é, essa variação não é um efeito relativístico, e sim variação devido à perda de massa por combustão, exaustão, etc.

Como modelo, utilizaremos o movimento de um foguete no espaço onde o campo gravitacional é nulo ($\vec{g} = 0$). Consideraremos que a exaustão de gases é o único mecanismo de propulsão.

Seja v a velocidade do foguete em relação a um referencial fixo O e u a velocidade de exaustão dos gases, relativo a um referencial O' que se move com o foguete, conforme mostra a figura 3-8.

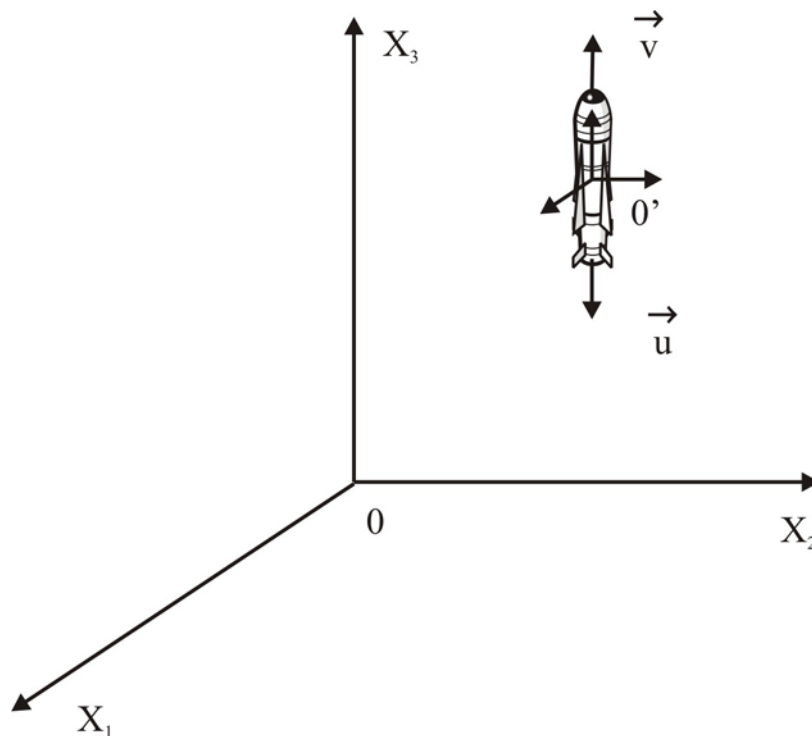


Figura 3-8

Onde: $v \Rightarrow$ Velocidade do foguete relativo a O .
 $m = m(t) \Rightarrow$ Massa variável.
 $u \Rightarrow$ Velocidade dos gases relativo a O' .
 $v - u \Rightarrow$ Velocidade dos gases relativo a O .

A velocidade de exaustão dos gases relativo ao referencial O será $\vec{v} - \vec{u}$. Representamos a massa do foguete por uma função $m = m(t)$.

Após um certo instante de tempo dt , a massa do foguete será $m - dm'$ e sua velocidade $v + dv$, conforme a figura 3-9.

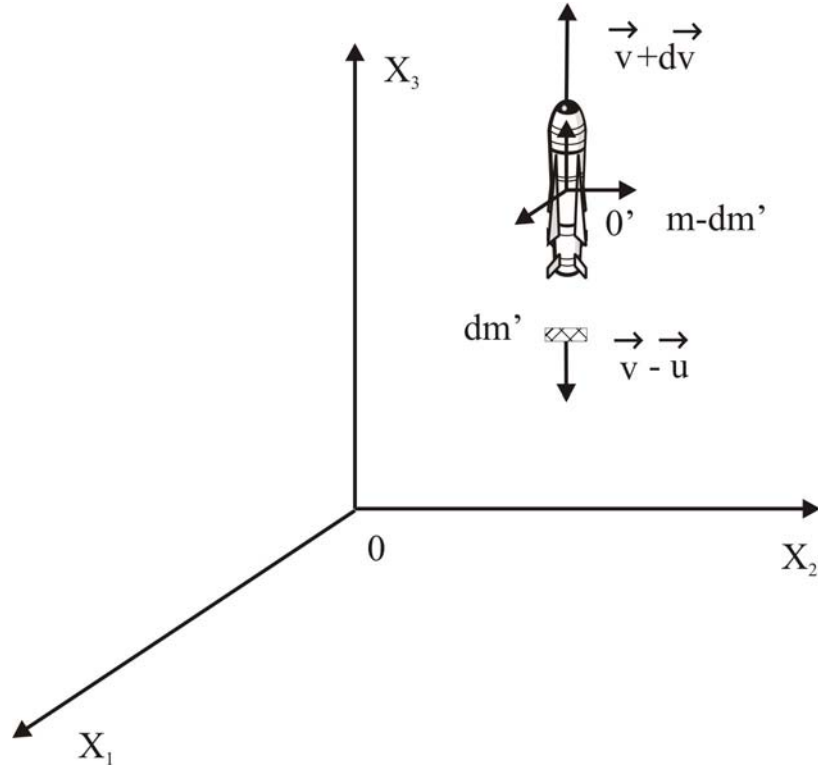


Figura 3-9

Como não há forças externas atuando no sistema, o momento se conserva

$$P_i = P_f \quad (3.119)$$

$$mv = (m - dm')(v + dv) + dm'(v - u)$$

$$\cancel{mv} = \cancel{mv} + mdv - vdm' - dm'dv + dm'\cancel{v} - udm'$$

$$mdv - dm'dv - udm' = 0 \quad (3.120)$$

Negligenciando o produto $dm'dv$,

$$mdv = udm' \quad (3.121)$$

A variação de massa dm do foguete é igual a massa de exaustão dm' . Como a massa do foguete diminui, devemos tomar

$$dm = -dm' \quad (3.122)$$

Substituindo (3.122) em (3.121),

$$dv = -u \frac{dm}{m} \quad (3.123)$$

Considerando que no início da queima do combustível, o foguete possua massa m_o e velocidade v_o , podemos calcular a velocidade em função da massa em qualquer ponto

$$\int_{v_o}^v dv' = -u \int_{m_o}^m \frac{dM}{M} \quad (3.124)$$

$$v - v_o = u \ln(m_o / m)$$

$$v = v_o + u \ln(m_o / m) \quad (3.125)$$

Da equação acima, vemos que para maximizarmos a velocidade do foguete devemos maximizar a velocidade de exaustão e a razão (m_o / m) . Devido a limitação imposta pela razão (m / m_o) , utilizam-se foguetes multiestágios. Para isso, consideramos que m_o seja a massa total do foguete. Após a queima do combustível contido em cada estágio, joga-se fora o depósito onde o combustível estava acondicionado, livrando o foguete da massa adicional.

Se m_1 é a massa do primeiro estágio

$$m_1 = m_a + m_b \quad (3.126)$$

em que m_a é a massa do combustível e m_b a massa do depósito, a velocidade ao final do primeiro estágio será

$$v_1 = v_o + u \ln\left(\frac{m_o}{m_1}\right) \quad (3.127)$$

Ao final do primeiro estágio, a massa do depósito m_b é descartada e o segundo estágio começa a ser utilizado. Aqui, m_a é a massa inicial do segundo estágio e m_2 a massa do combustível (m_c) mais a massa do depósito do segundo estágio m_d .

$$m_2 = m_c + m_d \quad (3.128)$$

A velocidade ao final do segundo estágio será

$$v_2 = v_1 + u \ln(m_a / m_2) \quad (3.129)$$

Utilizando (3.127) na equação acima,

$$v_2 = v_o + u \ln\left(\frac{m_o}{m_1}\right) + u \ln\left(\frac{m_a}{m_2}\right)$$

$$v_2 = v_o + u \ln\left(\frac{m_o m_a}{m_1 m_2}\right) \quad (3.130)$$

Observe que

$$\left(\frac{m_o m_a}{m_1 m_2} \right) \quad (3.131)$$

pode ser muito maior que

$$(m_o / m_1) \quad (3.132)$$

mostrando que a utilização de estágios otimiza o foguete.

O movimento de um foguete próximo à superfície da Terra é complicado. Entretanto, fazendo algumas simplificações, podemos obter um resultado analítico razoável. Consideraremos que o movimento seja vertical; que a resistência do ar seja nula e que a aceleração da gravidade seja constante. Utilizando a 2ª Lei de Newton,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ext} &= \frac{d\vec{P}}{dt} \\ d\vec{P} &= \vec{F}_{ext} dt \\ &= \vec{P}_f - \vec{P}_i \end{aligned} \quad (3.133)$$

Tomando o valor de $\vec{F}_{ext} = -m\vec{g}$ e usando os valores de $\vec{P}_i$ e $\vec{P}_f$ dados na equação (3.119)

$$\begin{aligned} -mgdt &= [(m - dm')(v + dv) + dm'(v - u)] - mv \\ -mgdt &= \cancel{mv} + mdv - v\cancel{dm'} - dm'dv + \cancel{dm'}v - dm'u - \cancel{mv} \\ -mgdt &= mdv - dm'u \end{aligned}$$

como $dm' = -dm$

$$\begin{aligned} -g &= \frac{dv}{dt} + \frac{u}{m} \frac{dm}{dt} \\ \frac{dv}{dt} &= -g - \frac{u}{m} \frac{dm}{dt} \end{aligned} \quad (3.134)$$

Considerando agora que a queima do combustível seja do tipo

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m_i \quad (3.135)$$

ao integrarmos a equação anterior,

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_i} \int dm &= -\alpha \int dt \\ m/m_i &= -\alpha t + c \quad p / t = 0, m = m_i \Rightarrow c = 1 \end{aligned}$$

$$m_i/m = 1/(1 - \alpha t) \quad (3.136)$$

Substituindo (3.135) em (3.134) e usando (3.136),

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{u}{m}(-\alpha m_i) = -g + \frac{u\alpha}{1 - \alpha t}$$

Integrando agora a equação acima de $t = 0$, quando $v = 0$ até o instante de tempo $t = t_f$, quando $v = v_f$, teremos

$$\int_0^{v_f} dv = -g \int_0^{t_f} dt + u \int_0^{t_f} \frac{\alpha dt}{1 - \alpha t} \quad (3.137)$$

Fazendo

$$1 - \alpha t = A$$

$$dA = -\alpha dt$$

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \frac{\alpha dt}{1 - \alpha t} &= -\ln(1 - \alpha t) \Big|_0^{t_f} \\ &= -\ln(1 - \alpha t_f) \end{aligned} \quad (3.138)$$

Substituindo o resultado acima em (3.137),

$$v_f = -gt_f - u \ln(1 - \alpha t_f) \quad (3.139)$$

Considerando que em $t = 0$, $h = 0$ e que em $t = t_f$, $h = h_f$, teremos

$$\begin{aligned} \int_0^{h_f} dx &= -g \int_0^{t_f} t dt - u \int_0^{t_f} \ln(1 - \alpha t) dt \\ h_f &= -g \frac{t_f^2}{2} - u \int_0^{t_f} \ln(1 - \alpha t) dt \end{aligned} \quad (3.140)$$

Devemos resolver a integral

$$\int_0^{t_f} \ln(1 - \alpha t) dt$$

Fazendo

$$1 - \alpha t = A \quad dt = -\frac{dA}{\alpha}$$

$$\int_0^{t_f} \ln(1 - \alpha t) dt = -\int_0^{t_f} \ln(A) \frac{dA}{\alpha} \quad (3.141)$$

Aplicando uma nova mudança de variável do tipo

$$\ln A = u \quad (3.142)$$

$$A = e^u \quad (3.143)$$

$$dA = e^u du \quad (3.144)$$

$$\int u' e^{u'} du' = u' e^{u'} - \int e^{u'} du' \quad (3.145)$$

$$\left. \begin{array}{l} u' = u \\ du' = du \end{array} \right\} \quad (3.146)$$

$$\left. \begin{array}{l} e^{u'} du' = dy \\ y = \int e^{u'} du' \end{array} \right\} \quad (3.147)$$

$$\begin{aligned} \int u' e^{u'} du' &= u e^u - e^u \\ &= A \ln A - A \end{aligned} \quad (3.148)$$

$$\begin{aligned} - \int_0^{t_f} \ln(1 - \alpha t) dt &= \frac{1}{\alpha} [A \ln A - A] \\ &= - \frac{1}{\alpha} [A - A \ln A] \end{aligned} \quad (3.149)$$

$$\begin{aligned} - \int_0^{t_f} \ln(1 - \alpha t) dt &= - \frac{1}{\alpha} \left[(1 - \alpha t) \Big|_0^{t_f} - (1 - \alpha t) \ln(1 - \alpha t) \Big|_0^{t_f} \right] \\ &= - \frac{1}{\alpha} \left[(1 - \alpha t_f) - (1 - \alpha t_f) \ln(1 - \alpha t_f) - 1 \right] \\ - \int_0^{t_f} \ln(1 - \alpha t) dt &= t_f + \frac{(1 - \alpha t_f)}{\alpha} \ln(1 - \alpha t_f) \end{aligned} \quad (3.150)$$

Substituindo esse resultado em (3.140),

$$h_f = -g \frac{t_f^2}{2} + u t_f + \frac{u}{\alpha} (1 - \alpha t_f) \ln(1 - \alpha t_f) \quad (3.151)$$

Observe que t_f é o tempo de combustão e pode ser determinado pela equação (3.135)

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= -\alpha m_i \\ \int_0^{t_f} dt &= - \frac{1}{\alpha m_i} \int_{m_i}^{m_f} dm \\ t_f &= - \frac{1}{\alpha m_i} [m]_{m_i}^{m_f} \end{aligned} \quad (3.152)$$

$$\begin{aligned}
 t_f &= -\frac{1}{\alpha m_i} [m_f - m_i] \\
 t_f &= \frac{1}{\alpha} \left[1 - \frac{m_f}{m_i} \right]
 \end{aligned} \tag{3.153}$$

Substituindo t_f em (3.139) e (3.151), teremos

$$\begin{aligned}
 v_f &= -\frac{g}{\alpha} \left(1 - \frac{m_f}{m_i} \right) - u \ln \left[1 - \frac{\alpha}{\alpha} \left(1 - \frac{m_f}{m_i} \right) \right] \\
 v_f &= -\frac{g}{\alpha} \left(1 - \frac{m_f}{m_i} \right) - u \ln \frac{m_f}{m_i}
 \end{aligned} \tag{3.154}$$

$$h_f = \frac{1}{\alpha} \left[1 - \frac{m_f}{m_i} \right] \left[u - \frac{g}{2\alpha} \left(1 - \frac{m_f}{m_i} \right) \right] + \frac{u}{\alpha} \frac{m_f}{m_i} \ln \left(\frac{m_f}{m_i} \right) \tag{3.155}$$

MOVIMENTO EM REFERENCIAIS NÃO INERCIAIS

4-1 INTRODUÇÃO

Sabemos que as Leis de Newton são válidas apenas em referenciais inerciais. Entretanto existem problemas em que as equações de movimento, em referenciais inerciais, são extremamente complexas e o movimento é mais fácil de ser tratado em referenciais não inerciais, isto é, em referenciais acelerados.

O objetivo deste capítulo consiste em modificar as equações de movimento de forma que estas sejam válidas em referenciais acelerados.

Como exemplo típico onde essa análise é necessária, temos o movimento de partículas próximo à superfície da Terra (seção 3) e o problema envolvendo o movimento de corpos rígidos (capítulo 9).

4-2 SISTEMA DE COORDENADAS ACELERADO

Faremos aqui a análise de sistemas acelerados. Por simplicidade, discutiremos os movimentos de translação e rotação, separadamente.

a) Movimento de Translação

Consideremos dois sistemas de referência O e O' , cujos eixos coordenados sejam paralelos e que O seja um sistema de referência inercial, conforme mostra a figura 4-1.

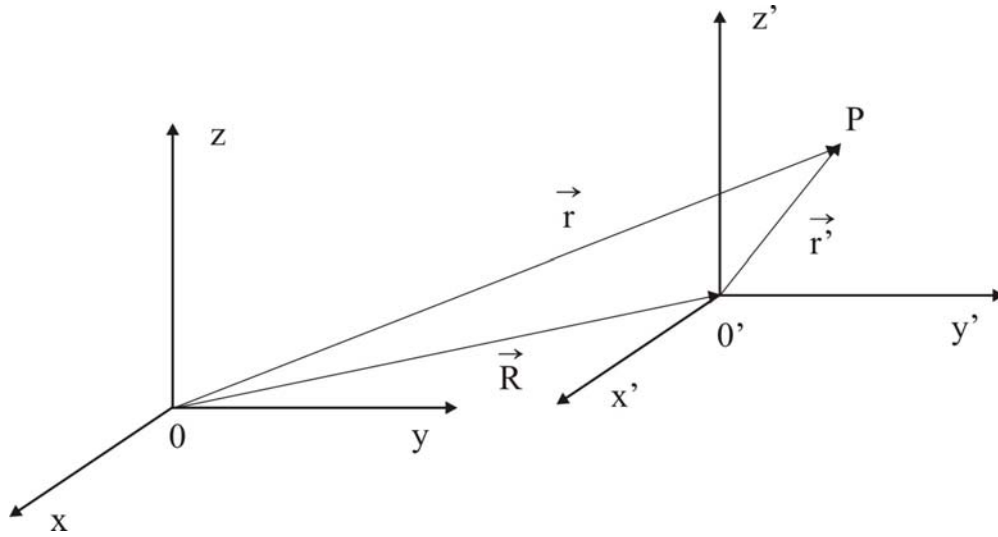


Figura 4-1

Da figura 4-1, vemos que o raio vetor do ponto P nesses referenciais estão relacionados da seguinte forma

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \quad (4.1)$$

Derivando em relação ao tempo,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \\ \vec{v} &= \vec{V} + \vec{v}' \end{aligned} \quad (4.2)$$

Derivando, novamente,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} \\ \vec{a} &= \vec{A} + \vec{a}' \end{aligned} \quad (4.3)$$

Caso o sistema O' seja também um referencial inercial, teremos $\vec{A} = 0$, de forma que

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

isto é,

$$\vec{F} = \vec{F}' \quad (4.4)$$

Se O' é um referencial não inercial, $\vec{A} \neq 0$, multiplicando a equação (4.3) pela massa da partícula (m), teremos

$$m\vec{a} = m\vec{A} + m\vec{a}' \quad (4.5)$$

Como O é um referencial inercial, identificamos o primeiro termo como a força que atua na partícula

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{A} + m\vec{a}' \\ m\vec{a}' &= \vec{F} - m\vec{A} \\ m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} &= \vec{F} - m\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}\end{aligned}\quad (4.6)$$

Vemos assim, que no sistema O' , poderíamos modificar a Lei de Newton introduzindo um termo adicional devido à aceleração de O' relativo a O . Denominamos esse termo adicional $(-m\vec{A})$ de força fictícia, uma vez que pode ser alterada, ou até anulada, escolhendo-se adequadamente um outro sistema de referência. Forças reais são devido à interação de objetos e são independentes do observador ou do sistema de coordenadas em que o movimento do sistema é considerado, o que não é verdade para forças fictícias. Essa distinção é relaxada na Teoria da Relatividade Geral.

b) Movimento de Rotação

Consideremos agora dois sistemas de coordenadas O e O' , onde o sistema de coordenadas O' , relativo ao sistema inercial O , rotaciona em torno de uma direção $\hat{\lambda}$, com velocidade angular $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{\lambda}$$

conforme mostra a figura 4-2. Da figura, vemos que

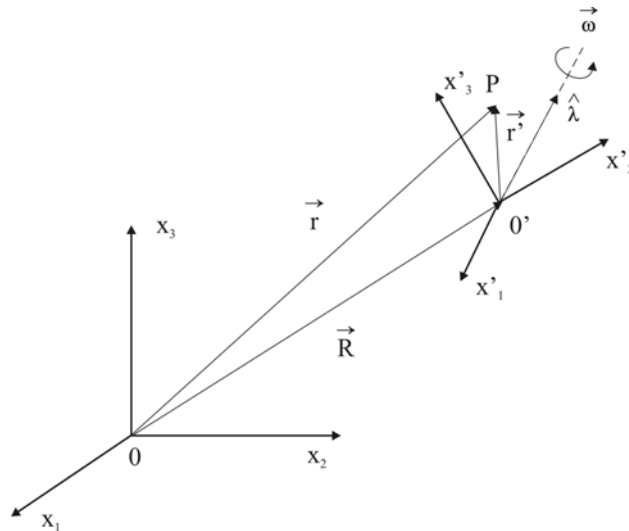


Figura 4-2

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \quad (4.7)$$

$$\vec{r} = \vec{R} + \sum_{i=1}^3 x'_i \hat{e}'_i \quad (4.8)$$

Derivando em relação ao tempo,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \sum_{i=1}^3 \hat{e}'_i \frac{dx'_i}{dt} + \sum_{i=1}^3 x'_i \frac{d\hat{e}'_i}{dt} \quad (4.9)$$

O termo

$$\sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i}{dt} \hat{e}'_i$$

é a velocidade da partícula relativa ao referencial em rotação quando observado por alguém nesse referencial

$$\sum_{i=1}^3 \frac{dx'_i}{dt} \hat{e}'_i = \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{O'} \quad (4.10)$$

O termo

$$\sum_{i=1}^3 x'_i \frac{d\hat{e}'_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (4.11)$$

é a velocidade aparente do ponto P devido a rotação de O' . Vejamos como obter o resultado expresso na equação (4.11).

Sabemos que a velocidade angular pode ser escrita da forma

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega \hat{\lambda} \\ &= \sum_{i=1}^3 \omega_{x'_i} \hat{e}'_i \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde $\omega_{x'_1}$ é a velocidade angular com que os eixos x'_2 e x'_3 giram em torno de x'_1 . Devemos observar que $\omega_{x'_1}$ não muda a direção de $\hat{e}'_1$. Para obtermos a mudança em $\hat{e}'_1$, devemos somar as contribuições devido a $\omega_{x'_2}$ e a $\omega_{x'_3}$. A contribuição relativa a $\omega_{x'_2}$, é mostrada na figura 4-3.

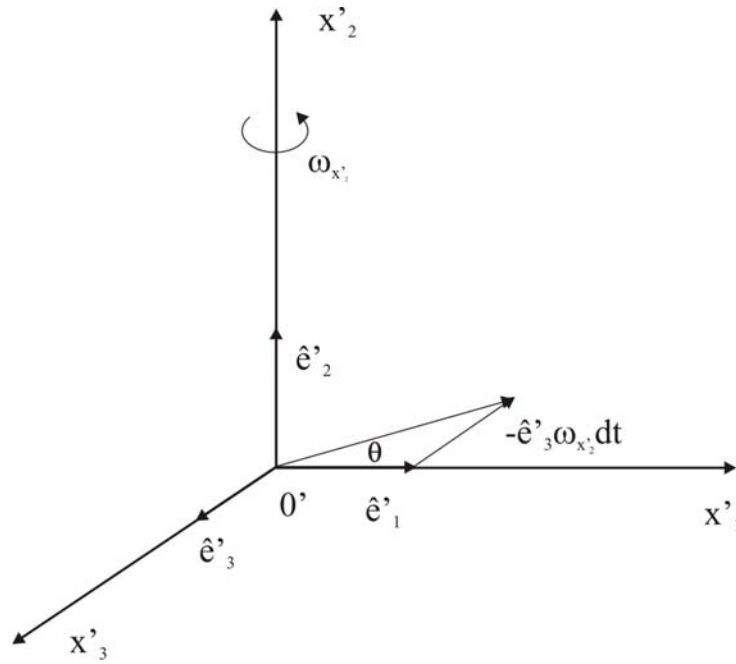


Figura 4-3

Na figura 4-4 mostramos a contribuição devido a $\omega_{x'_3}$.

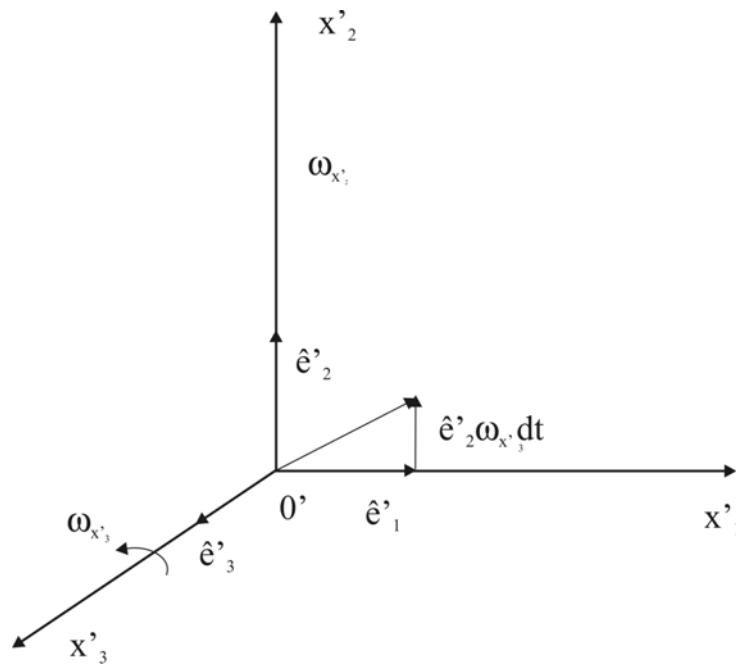


Figura 4-4

Somando as duas contribuições, teremos

$$d\hat{e}'_1 = (\hat{e}'_2 \omega_{x'_3} - \hat{e}'_3 \omega_{x'_2}) dt \quad (4.13)$$

$$\frac{d\hat{e}'_1}{dt} = (\hat{e}'_2 \omega_{x'_3} - \hat{e}'_3 \omega_{x'_2}) \quad (4.14)$$

$$= \vec{\omega} \times \hat{e}'_1 \quad (4.15)$$

De forma análoga

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}'_2}{dt} &= (\hat{e}'_3 \omega_{x'_1} - \hat{e}'_1 \omega_{x'_3}) \\ &= \vec{\omega} \times \hat{e}'_2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}'_3}{dt} &= (\hat{e}'_1 \omega_{x'_2} - \hat{e}'_2 \omega_{x'_1}) \\ &= \vec{\omega} \times \hat{e}'_3 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Substituindo (4.15), (4.16) e (4.17) em (4.11),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 x'_i \frac{d\hat{e}'_i}{dt} &= \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^3 \hat{e}'_i x'_i \\ &= \vec{\omega} \times \vec{r}' \end{aligned} \quad (4.18)$$

que demonstra a veracidade da equação (4.11).

Utilizando os resultados (4.10) e (4.11) em (4.9), teremos

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (4.19)$$

$$\vec{v}_0 = \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (4.20)$$

onde:

$\vec{v}_0$ é a velocidade da partícula relativa ao referencial O ;

$\vec{V}$ é a velocidade do referencial O' relativa a O ;

$\vec{v}'$ é a velocidade da partícula relativa a O' ;

$\vec{\omega} \times \vec{r}'$ é a velocidade da partícula quando medida no referencial O devido à rotação de O' .

Observando a equação (4.20), definimos uma grandeza

$$\left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{0'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (4.21)$$

Essa grandeza pode ser interpretada como um operador

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{0'} + \vec{\omega} \times \quad (4.22)$$

que relaciona a derivada temporal de qualquer vetor, no referencial O , com a operação de

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{O'} + \vec{\omega} \times$$

no referencial O' .

Determinaremos agora a aceleração. Derivando (4.20) em relação ao tempo,

$$\left. \frac{d}{dt} (\vec{v}_0) \right|_0 = \left. \frac{d}{dt} \vec{V} \right|_0 + \left. \frac{d\vec{v}'}{dt} \right|_0 + \left. \frac{d}{dt} \vec{\omega} \right|_0 \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_0 \quad (4.24)$$

$$\vec{a}_0 = \vec{A} + \left. \frac{d\vec{v}'}{dt} \right|_0 + \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_0 \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_0 \quad (4.25)$$

Utilizando agora a equação (4.22), podemos escrever que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{v}'}{dt} \right|_0 &= \left. \frac{d\vec{v}'}{dt} \right|_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{v}' \\ &= \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_0 \times \vec{r}' &= \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{O'} \times \vec{r}' + (\vec{\omega} \times \vec{\omega}) \times \vec{r}' \\ &= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_0 &= \vec{\omega} \times \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ \vec{\omega} \times \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_0 &= \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \end{aligned} \quad (4.28)$$

Substituindo (4.26), (4.27) e (4.28) em (4.25).

$$\begin{aligned} \vec{a}_0 &= \vec{A} + \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ \vec{a}_0 &= \vec{A} + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde:

$\vec{a}_0$ é a aceleração da partícula relativa ao referencial O ;

$\vec{A}$ é a aceleração do referencial O' relativa a O ;

$\vec{a}'$ é a aceleração da partícula relativa ao referencial O' ;

$2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ é a aceleração de Coriolis, que é diferente de zero apenas quando a partícula está se movendo em relação ao referencial O' , mas é independente da posição da partícula relativo a O' ;

$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$ é a aceleração transversa ou azimutal, devido à aceleração angular de O' ;

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ é a aceleração centrípeta, que é devido à rotação de O' em torno do eixo de rotação.

Utilizando a equação (4.22), vemos que a aceleração angular é a mesma nos referenciais O e O' .

$$\left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{0'} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \stackrel{=0}{=} \vec{\alpha} = \vec{\alpha}' \quad (4.30)$$

Como o referencial O é inercial, podemos utilizar as Leis de Newton, isto é, podemos escrever

$$\vec{F} = m\vec{a}_0 \quad (4.31)$$

Multiplicando (4.29) por m e usando a equação acima

$$\vec{F} = m\vec{a}' + m\left[\vec{A} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'\right] \quad (4.32)$$

Resolvendo para $m\vec{a}'$,

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\left[\vec{A} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'\right] \quad (4.33)$$

que pode ser interpretado como uma força fictícia (força não inercial)

$$\vec{F}_{ef} = \vec{F} - m\left[\vec{A} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'\right] \quad (4.34)$$

denominada de força efetiva, que modifica a força real $\vec{F}$ devido ao fato de estarmos usando um referencial não inercial (referencial acelerado). A equação (4.34) é também escrita da forma

$$\vec{F}_{ef} = \vec{F} + \vec{F}_{tr} + \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_{az} \quad (4.35)$$

em que:

$\vec{F}_{tr}$ é a força de translação

$$\vec{F}_{tr} = -m\vec{A} \quad (4.36)$$

$\vec{F}_{cor}$ é a força de Coriolis

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (4.37)$$

$\vec{F}_{cf}$ é a força centrífuga

$$\vec{F}_{cf} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (4.38)$$

$\vec{F}_{az}$ é a força azimutal

$$\vec{F}_{az} = -m\vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (4.39)$$

Devemos observar que excetuando $\vec{F}$, todas as outras forças descritas acima são forças fictícias, isto é, podem ser modificadas ou anuladas de acordo com a escolha do sistema de referência.

A força centrífuga é perpendicular ao eixo de rotação e tem a direção radial, como mostra a figura 4-5

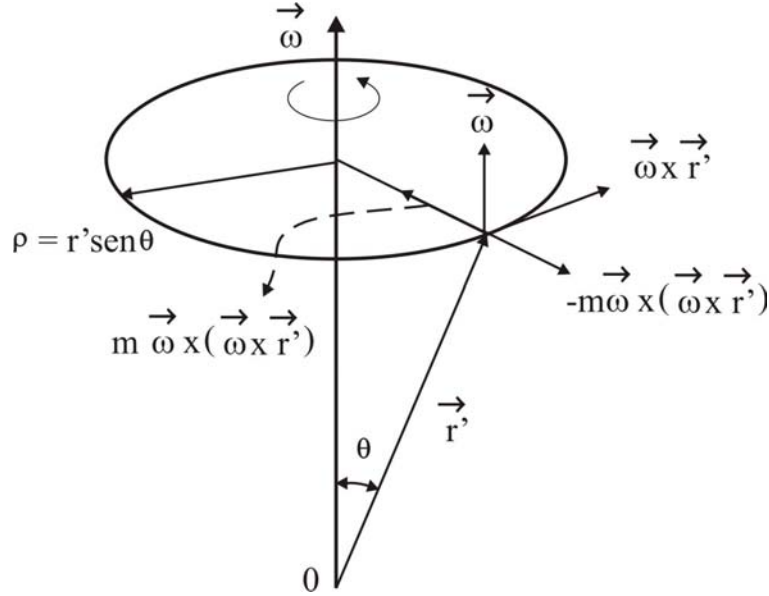


Figura 4-5

$$\vec{F}_{cf} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (4.38)$$

e tem módulo igual a

$$\begin{aligned} F_{cf} &= m\omega^2 r' \sin \theta \\ &= m\omega^2 \rho \end{aligned} \quad (4.40)$$

Usando a identidade vetorial

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

em (4.38), vemos que

$$\begin{aligned} \vec{F}_{cf} &= -m[\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}') - \vec{r}'(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})] \\ \vec{F}_{cf} &= -m[(\vec{\omega} \cdot \vec{r}')\vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}'] \end{aligned} \quad (4.41)$$

Da equação acima, vemos que

$$\vec{F}_{cf} = -\vec{\nabla}_r V_{cf} \quad (4.42)$$

em que

$$V_{cf} = \frac{m}{2} \left[(\vec{\omega} \cdot \vec{r}')^2 - \omega^2 \vec{r}'^2 \right] \quad (4.43)$$

é o potencial centrífugo.

Vejamos agora a força de Coriolis. Da equação (4.37),

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (4.37)$$

vemos que a força de Coriolis é perpendicular ao plano formado pelo eixo de rotação e a velocidade da partícula no referencial acelerado. Caso a velocidade da partícula tomada em relação ao referencial acelerado seja zero, a força de Coriolis será também nula.

Para entendermos melhor a origem física das forças centrífuga e de Coriolis, consideremos a equação (4.34)

$$\vec{F}_{ef} = \vec{F} - m \left[\vec{A} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' \right] \quad (4.34)$$

Quando o referencial O' não está acelerado em relação a O ,

$$\vec{A} = 0$$

Considerando ainda que $\vec{\omega}$ não dependa do tempo, sua derivada temporal $\dot{\vec{\omega}}$ (a aceleração angular) será nula, de modo que a equação (4.34) poderá ser escrita da forma

$$\vec{F}_{ef} = \vec{F} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (4.44)$$

$$\vec{F}_{ef} = \vec{F} + (\text{termos não inerciais}) \quad (4.45)$$

onde os termos não inerciais são as forças centrífuga e de Coriolis. Para um corpo que rotaciona em torno de um ponto, a única força real que atua sobre o corpo é a força centrípeta, que atrai o corpo na direção do centro

$$\vec{F}_{cp} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (4.46)$$

Para um observador que se move com o corpo em rotação, esse observa que o corpo não está caindo na direção do centro. Para conciliar esses dois resultados o observador postula a existência de uma força adicional de forma que a força resultante que atua no sistema seja nula. Apesar da artificialidade do argumento acima, isso é aceito para fazer com que as Leis de Newton sejam generalizadas de forma a valer também em referenciais não inerciais. Isso

só é possível quando forças não inerciais são introduzidas. O mesmo argumento é aplicado para a força de Coriolis quando tentamos descrever o movimento do corpo em relação ao referencial que gira. Na figura 4-6, mostramos como a força de Coriolis atua em uma partícula que se desloca com velocidade $\vec{v}'$ em um sistema que gira com frequência angular $\vec{\omega}$.

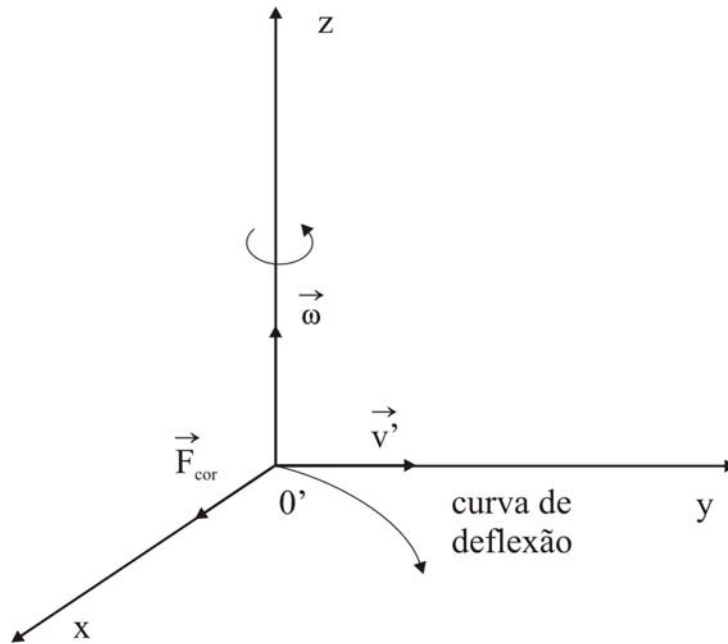


Figura 4-6

Vemos que a força de Coriolis deflete a partícula de sua trajetória original, para que os dois observadores não entrem em contradição quanto aos resultados obtidos.

4-3 MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA PRÓXIMO À SUPERFÍCIE DA TERRA

Quando analisamos o movimento de uma partícula próximo à superfície da Terra, podemos considerar que o movimento da Terra em relação a um referencial inercial é dominado pela rotação da Terra em torno de seu próprio eixo. O movimento de revolução da Terra em torno do Sol e o movimento do sistema solar com respeito à Via Láctea podem ser negligenciados. Consideramos também que a Terra seja esférica e isotrópica.

Para fazermos a análise deste problema, utilizamos o referencial inercial O no centro da Terra e o referencial não inercial O' na superfície da Terra, girando com a mesma velocidade angular desta, conforme mostra a figura 4-7.

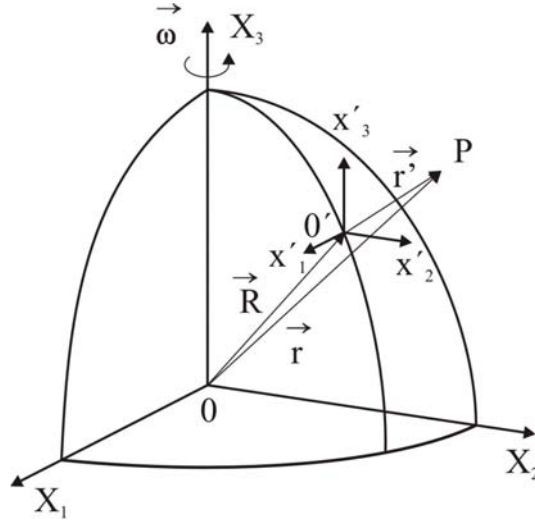


Figura 4-7

A equação de movimento de uma partícula de massa m no ponto P será dada pela equação (4.34), com o termo adicional da força peso $m\vec{g}$

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{F} - m \left[\vec{A} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' \right] \quad (4.47)$$

Sabendo que

$$\dot{\vec{\omega}} = 0 \quad (4.48)$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{R} \quad (4.49)$$

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \quad (4.50)$$

Podemos escrever (4.47) da forma

$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (4.51)$$

$$= \vec{F} + m\vec{g} - m \left\{ \vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times (\vec{R} + \vec{r}') \right] \right\} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (4.52)$$

Usando agora a equação (4.7)

$$m\vec{a}' = \vec{F} + m \left[\vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right] - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (4.53)$$

Observando o termo entre parênteses, vemos que este pode ser interpretado como a gravidade efetiva no ponto P, uma vez que é proporcional à massa e depende apenas da posição, o que torna seus efeitos indistinguíveis.

$$g_{ef} = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (4.54)$$

Próximo à superfície da Terra,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{R} + \vec{r}' \\ &\cong \vec{R} \end{aligned}$$

assim,

$$\vec{g}_{ef} = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \quad (4.55)$$

Mostramos na figura 4-8 cada um dos vetores da equação acima

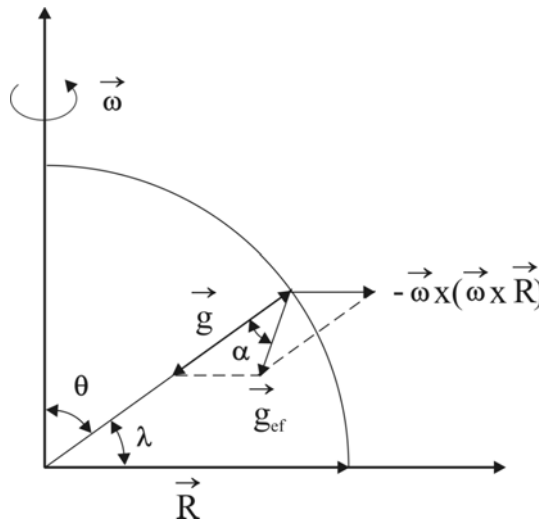


Figura 4-8

Vejamos agora como calcular o valor do ângulo α . A aceleração centrífuga é dada por

$$a_{cf} = \omega^2 R \sin \theta \quad (4.56)$$

onde

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4.57)$$

onde T é o período de rotação da Terra

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \cong 0,73 \cdot 10^{-4} \text{ rad / s} \quad (4.58)$$

Usando o valor do raio da Terra

$$R = 6.371.000 \text{ m} \quad (4.59)$$

$$a_{cf} = 0,03 \text{ sen } \theta \text{ m / s}^2 \quad (4.60)$$

isto é, o termo de correção em $\vec{g}$ é bem pequeno. O ângulo α entre $\vec{g}$ e $\vec{g}_{ef}$ pode ser escrito como

$$\alpha \cong \text{tg} \alpha = \frac{g_{ef}^h}{g_{ef}^v} \quad (4.61)$$

onde

$$g_{ef}^h = \omega^2 R \text{ sen } \theta \text{ sen } \lambda \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} g_{ef}^h &= \omega^2 R \text{ sen } \theta \text{ sen}(\pi/2 - \theta) \\ &= \omega^2 R \text{ sen } \theta \cos \theta \end{aligned}$$

é a componente de $\vec{g}_{ef}$ perpendicular a $\vec{g}$, e

$$\begin{aligned} g_{ef}^v &= g - \omega^2 R \text{ sen } \theta \cos \lambda \\ g_{ef}^v &= g - \omega^2 R \text{ sen}^2 \theta \end{aligned} \quad (4.63)$$

é a componente de $\vec{g}_{ef}$ paralelo a $\vec{g}$. Substituindo (4.62) e (4.63) em (4.61),

$$\alpha = \frac{\omega^2 R \text{ sen } \theta \cos \theta}{g - \omega^2 R \text{ sen}^2 \theta} \quad (4.64)$$

Quando um objeto cai em direção à Terra, este não o faz na direção do centro e sim na direção de $\vec{g}_{ef}$, Na verdade, devido à rotação da Terra, esta não é esférica e sim achatada nos pólos, de forma que $\vec{g}_{ef}$, na média, é perpendicular à superfície da Terra.

4-4 O PÊNDULO DE FOUCAULT

A rotação da Terra foi demonstrada por Foucault em 1851, utilizando um pêndulo bem longo, com uma massa grande, hoje denominado de Pêndulo de Foucault. O experimento consiste em fazer oscilar o pêndulo livremente. Devido à força de Coriolis

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (4.37)$$

o pêndulo irá sofrer a ação dessa força de forma a desviá-lo do plano de oscilação, fazendo com que este adquira o movimento de uma elipse em precessão.

Mostramos na figura 4-9 o pêndulo de Foucault. ϕ é o ângulo entre a direção de oscilação do pêndulo e o eixo polar, tomado como referência.

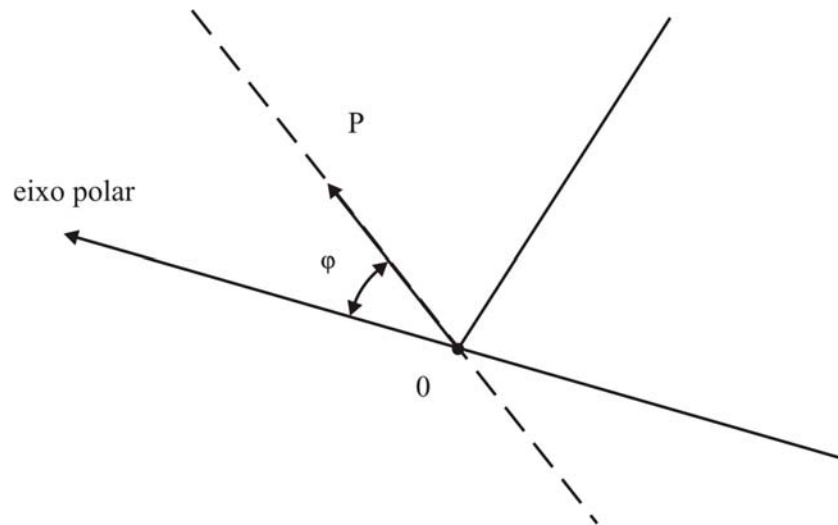


Figura 4-9

Para resolvermos o problema, escolhemos um sistema de coordenadas cartesianas, cuja origem é a posição de equilíbrio do pêndulo, conforme mostra a figura 4-10. As direções crescentes de x' e y' , correspondem às direções oeste e norte, respectivamente, e $\vec{T}$ a tensão no fio do pêndulo.

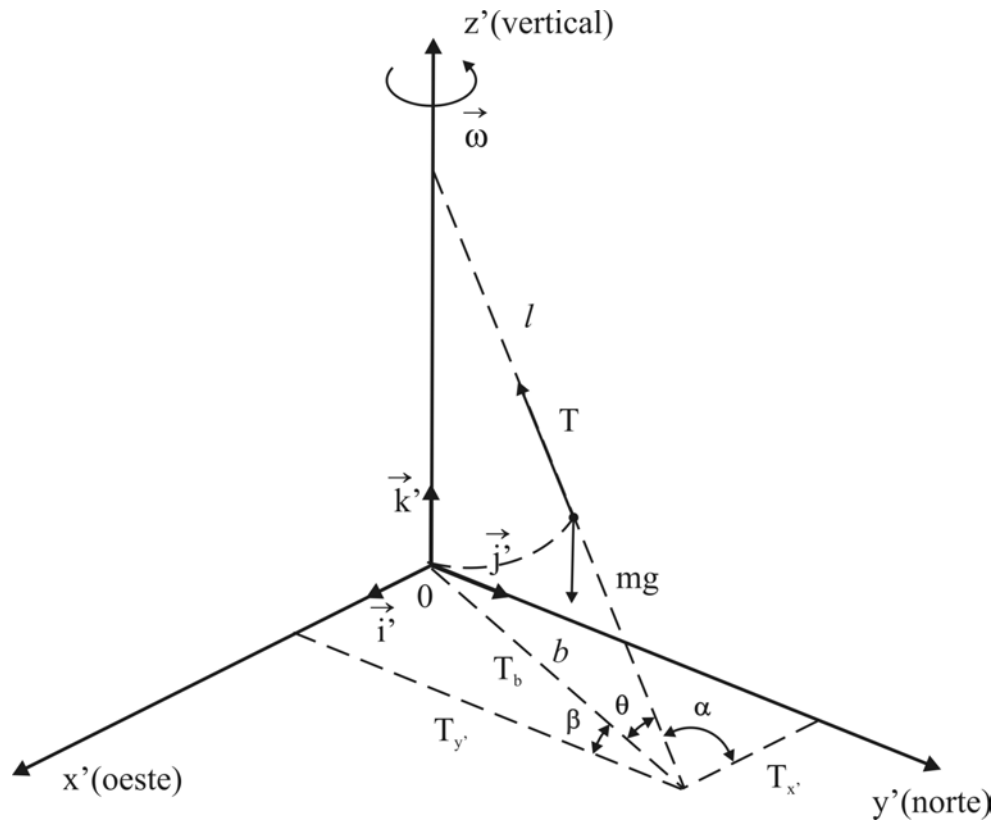


Figura 4-10

Nesse sistema, a gravidade efetiva será dada por

$$\vec{g}_{ef} = -g_{ef} \vec{k}' \quad (4.65)$$

Tornando λ como a latitude, a frequência angular de rotação da Terra será dada por

$$\vec{\omega}' = \frac{d\vec{\phi}}{dt} = \omega [\cos \lambda \vec{j}' + \sin \lambda \vec{k}'] \quad (4.66)$$

de forma que

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{v}' &= \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ 0 & \omega \cos \lambda & \omega \sin \lambda \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \end{vmatrix} \\ &= (\omega \dot{z}' \cos \lambda - \omega \dot{y}' \sin \lambda) \vec{i}' + \omega \dot{x}' \sin \lambda \vec{j}' - \omega \dot{x}' \cos \lambda \vec{k}' \end{aligned} \quad (4.67)$$

Da equação (4.60), vemos que o termo centrífugo

$$\vec{F}_{cf} = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (4.68)$$

é bem pequeno e pode ser negligenciado.

A equação de movimento do pêndulo será dada por

$$m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = m \vec{g} + \vec{T} - 2m \vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (4.69)$$

Da figura 4-10, vemos que

$$\frac{T_b}{T} = \frac{b}{\ell} \rightarrow T_b = \frac{b}{\ell} T \quad (4.70)$$

$$T_{x'} = -\frac{x'}{b} T_b \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{x'}{b} \frac{b}{\ell} T \\ &= -\frac{x'}{\ell} T \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$T_{y'} = -\frac{y'}{b} T_b \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{y'}{b} \frac{b}{\ell} T \\ &= -\frac{y'}{\ell} T \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$T_{z'} = -\frac{(\ell - z')}{\ell} T \quad (4.75)$$

Das equações (4.67), (4.72), (4.74) e (4.75), podemos escrever cada uma das componentes da equação (4.69) da forma

$$m\ddot{x}' = -\frac{x'}{\ell}T - 2m\omega(\dot{z}'\cos\lambda - \dot{y}'\sin\lambda) \quad (4.76)$$

$$m\ddot{y}' = -\frac{y'}{\ell}T - 2m\omega\dot{x}'\sin\lambda \quad (4.77)$$

$$m\ddot{z}' = \frac{(\ell - z')}{\ell}T - mg + 2m\omega\dot{x}'\cos\lambda \quad (4.78)$$

Considerando que a amplitude da oscilação é pequena, uma vez que a excursão horizontal é muito pequena comparada com o tamanho da corda do pêndulo, podemos negligenciar $\dot{z}'$ comparado a $\dot{x}'$ e $\dot{y}'$ e tomar a tensão aproximadamente igual ao peso mg . Fazendo essas aproximações, teremos:

a) De (4.76)

$$\ddot{x}' = -x'\frac{g}{\ell} + 2\omega\dot{y}'\sin\lambda \quad (4.79)$$

$$\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' + \frac{g}{\ell}x' = 0 \quad (4.80)$$

onde

$$\omega' = \omega\sin\lambda$$

b) De (4.77)

$$\ddot{y}' = -y'\frac{g}{\ell} - 2\omega\dot{x}'\sin\lambda \quad (4.81)$$

$$\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' + \frac{g}{\ell}y' = 0 \quad (4.82)$$

Isto é, temos um sistema de equações acopladas

$$\begin{cases} \ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' + \frac{g}{\ell}x' = 0 \\ \ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' + \frac{g}{\ell}y' = 0 \end{cases}$$

Multiplicando (4.82) por i e somando com (4.80), teremos

$$\ddot{x}' + i\ddot{y}' + 2\omega'(i\dot{x}' - \dot{y}') + \frac{g}{\ell}(x' + iy') = 0 \quad (4.83)$$

Chamando uma nova variável u'

$$u' = x' + iy' \quad (4.84)$$

podemos escrever (4.83) da forma

$$\ddot{u}' + 2i\omega'\dot{u}' + \frac{g}{\ell}u' = 0 \quad (4.85)$$

cujas soluções são dadas por

$$u'(t) = \exp[-i\omega't] \left\{ A \exp\left[(-\omega'^2 - \alpha^2)^{1/2}t\right] + B \exp\left[-(-\omega'^2 - \alpha^2)^{1/2}t\right] \right\} \quad (4.86)$$

onde

$$\alpha^2 = g/\ell \quad (4.87)$$

Considerando que a Terra tivesse rotação nula, $\omega' = 0$, teríamos que

$$\ddot{u} + \alpha^2 u = 0 \quad (4.88)$$

que é a equação de movimento de um pêndulo simples com frequência angular $\omega = \alpha$. Considerando que a frequência de oscilação do pêndulo é muito maior que a frequência de oscilação da Terra,

$$\alpha \gg \omega \quad (4.89)$$

podemos tomar (4.86) da forma

$$u'(t) \cong e^{-i\omega't} [Ae^{i\alpha t} + Be^{-i\alpha t}] \quad (4.90)$$

Podemos interpretar essa solução se observarmos que a equação para u tem solução do tipo

$$u(t) = x(t) + iy(t) \quad (4.91)$$

$$= Ae^{i\alpha t} + Be^{-i\alpha t} \quad (4.92)$$

Assim,

$$u'(t) = u(t)e^{-i\omega't} \quad (4.93)$$

que nos permite escrever que

$$x'(t) + iy'(t) = [x(t) + iy(t)]e^{-i\omega't} \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} &= [x(t) + iy(t)](\cos \omega't - i \sin \omega't) \\ &= x \cos \omega't + y \sin \omega't + i(-x \sin \omega't + y \cos \omega't) \end{aligned} \quad (4.95)$$

isto é,

$$x'(t) = x \cos \omega't + y \sin \omega't \quad (4.96)$$

$$y'(t) = -x \sin \omega't + y \cos \omega't \quad (4.97)$$

que escrito da forma matricial ficará

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega' t & \sin \omega' t \\ -\sin \omega' t & \cos \omega' t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

Podemos interpretar (4.98) da seguinte forma: (x', y') é obtido aplicando-se a matriz rotação λ a (x, y) , onde

$$\lambda = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\theta = \omega' t = \omega \sin \lambda t$$

que nos permite dizer que o plano de oscilação do pêndulo rotaciona com uma frequência $\omega' = \omega \sin \lambda$. No Hemisfério Norte (Sul) essa rotação será horária (anti-horária), com período.

$$P = \frac{2\pi}{\omega'}$$

$$= \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda}$$

$$P = \frac{24}{\sin \lambda} \text{ horas}$$

OSCILAÇÕES

5-1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo abordaremos o problema das oscilações lineares, utilizando o oscilador harmônico como um dispositivo que nos guiará nessa discussão. Essa escolha deve-se ao fato de que este propicia o entendimento geral das propriedades das oscilações, além de ter uma abrangência muito grande na representação de sistemas físicos reais. Essa característica é consequência de que próximo à posição de equilíbrio, podemos aproximar a maioria dos sistemas por um oscilador harmônico.

Consideremos o caso genérico em que a função que descreve o potencial que atua no sistema possa ser expandida em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio, isto é,

$$V(x) = V(x_0) + (x - x_0) \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=x_0} + \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_0} + \frac{1}{3!} (x - x_0)^3 \left. \frac{d^3V}{dx^3} \right|_{x=x_0} + \dots \quad (5.1)$$

em que x_0 é um ponto de equilíbrio. Se x_0 é um ponto de mínimo

$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=x_0} = 0 \quad (5.2)$$

e

$$\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_0} > 0 \quad (5.3)$$

Considerando que os termos de terceira ordem possam ser negligenciados, teremos que

$$V(x) - V(x_0) \cong \frac{1}{2} \left[\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_0} \right] (x - x_0)^2 \quad (5.4)$$

Comparando a equação acima com a energia potencial elástica para molas,

$$V = \frac{1}{2} kx^2 \quad (5.5)$$

vemos que nosso sistema pode ser aproximado por um oscilador harmônico simples com constante de mola

$$k = \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=x_0} \quad (5.6)$$

em que

$$k = m\omega^2 \quad (5.7)$$

Para sistemas com atrito, podemos representá-los pelo oscilador harmônico com um termo de amortecimento. Nesse caso, temos um oscilador harmônico amortecido. Caso haja ainda uma fonte externa atuando sobre o sistema, dizemos que este é um oscilador harmônico forçado.

O objetivo deste capítulo consiste em estudar detalhadamente os osciladores harmônicos simples, amortecido e forçado. Dentre as muitas aplicações que utilizam o oscilador harmônico como modelo, podemos citar as deformações elásticas dos sólidos, sistemas com atrito, vibrações mecânicas, átomos em redes cristalinas, núcleo de átomos em moléculas, etc.

As oscilações não-lineares serão abordadas na disciplina Mecânica Teórica II.

5-2 O OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

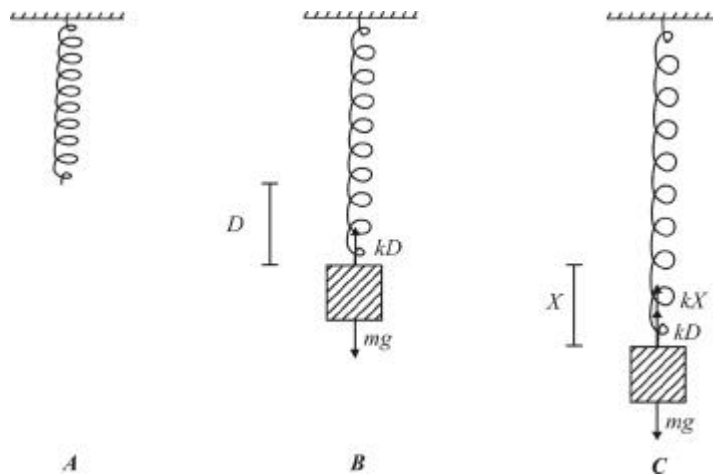


Figura 5-1

O oscilador harmônico simples consiste de um sistema composto de um corpo de massa m preso na extremidade de uma mola com constante elástica k , conforme mostra a figura 5-1. Na figura 5-1-A, temos apenas a mola. Colocando a massa na extremidade da mola, esta irá se distender até que a força restauradora da mola seja contrabalançada pela

força peso, conforme mostra a figura 5-1-B. Deslocando a massa da posição de equilíbrio de uma quantidade x , conforme mostra a figura 5-1-C, teremos que a equação de movimento do sistema será

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(D + x) + mg \quad (5.8)$$

Como

$$-kD + mg = 0 \quad (5.9)$$

então

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (5.10)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

Fazendo

$$w_0^2 = \frac{k}{m} \quad (5.11)$$

teremos

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + w_0^2 x = 0 \quad (5.12)$$

que é uma equação diferencial homogênea de 2ª ordem a coeficientes constantes. Para solucioná-la, devemos resolver a equação característica

$$l^2 + w_0^2 = 0 \quad (5.13)$$

cujas raízes são

$$l = \pm i w_0 \quad (5.14)$$

Sabemos que caso as raízes da equação característica sejam complexas

$$l = a + ib \quad (5.15)$$

a solução geral será da forma

$$x(t) = e^{at} [A \cos bt + B \sin bt] \quad (5.16)$$

Comparando (5.14) com (5.15), vemos que $a = 0$ e $b = w_0$, isto é, nossa solução geral será do tipo

$$x(t) = [A \cos w_0 t + B \sin w_0 t] \quad (5.17)$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$A \cos w_0 t + B \sin w_0 t = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(w_0 t \pm d) \quad (5.18)$$

$$\tan d = \frac{\sin d}{\cos d} \quad (5.19)$$

$$\tan d = \mp \frac{B}{A} \quad (5.20)$$

podemos escrever (5.17) da forma

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - d) \quad (5.21)$$

em que

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (5.22)$$

$$\tan d = \frac{B}{A} \quad (5.23)$$

Mostramos na figura 5.2 o gráfico da equação (5.21), com $\omega = 1$, para $d = 0$ e $d = -\frac{\pi}{2}$

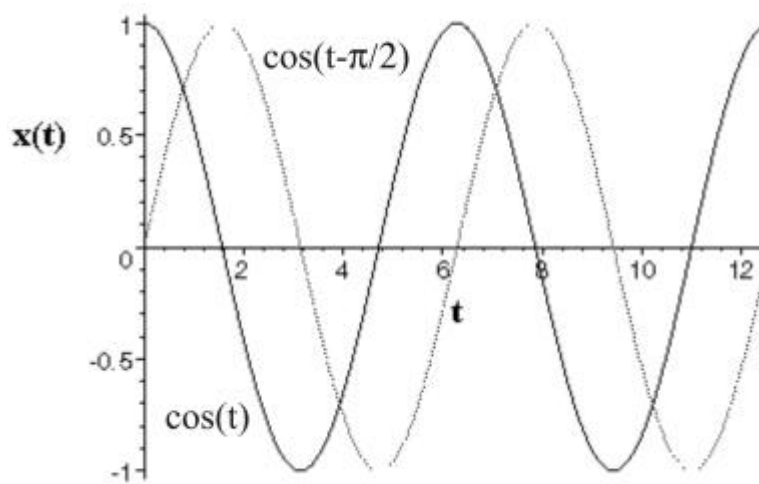


Figura 5.2

Calcularemos agora o valor da energia cinética (T):

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.24)$$

Derivando (5.21) em relação a t

$$\dot{x}(t) = -C\omega_0 \sin(\omega_0 t - d) \quad (5.25)$$

e substituindo em (5.24), teremos

$$T = \frac{1}{2}mC^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t - d) \quad (5.26)$$

A energia potencial U é obtida calculando-se o trabalho necessário para deslocarmos a massa da origem até o ponto considerado

$$U = \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{x} \quad (5.27)$$

$$U = \int kx dx$$

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad (5.28)$$

Substituindo a equação (5.21) na equação (5.28),

$$U = \frac{1}{2} kC^2 \cos^2(w_0 t - d) \quad (5.29)$$

e utilizando (5.11)

$$U = \frac{1}{2} mw_0^2 C^2 \cos^2(w_0 t - d) \quad (5.30)$$

A energia total será a soma de (5.26) e (5.30)

$$E = T + U \quad (5.31)$$

$$E = \frac{1}{2} mw_0^2 C^2 [\sin^2(w_0 t - d) + \cos^2(w_0 t - d)]$$

$$E = \frac{1}{2} mw_0^2 C^2 \quad (5.32)$$

$$E = \frac{1}{2} kC^2 \quad (5.33)$$

Mostramos na figura 5-3 os gráficos da energia cinética [equação (5.26)], energia potencial [equação (5.30)] e energia total [equação (5.33)] para $d = 0$, $m=2$, $C=1$ e $w_0 = 1$

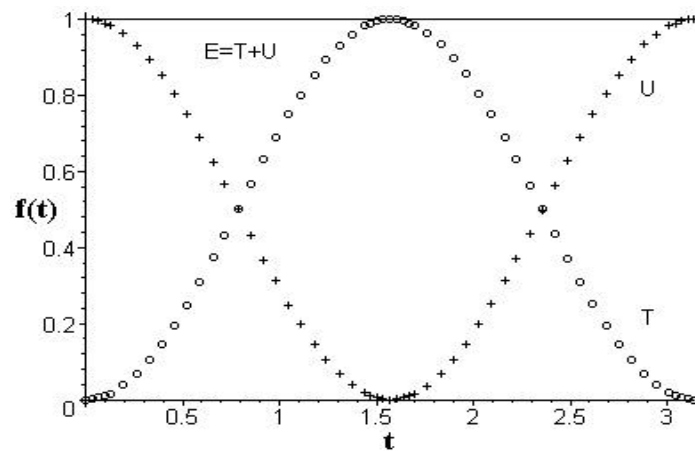


Figura 5-3

O período P do movimento é o tempo gasto para que a partícula execute uma oscilação completa. Assim,

$$w_0 t + q_0 + 2p = w_0 (t + P) + q_0 \quad (5.34)$$

$$P = \frac{2p}{w_0} \quad (5.35)$$

$$P = 2p \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5.36)$$

A frequência n é o inverso do período

$$n = \frac{1}{P} \quad (5.37)$$

$$n = \frac{w_0}{2p} \quad (5.38)$$

$$n = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.39)$$

5-3 O OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES BIDIMENSIONAL

Consideremos o movimento de uma partícula de massa m , sujeita a uma força restauradora do tipo

$$\vec{F} = -k\vec{r} \quad (5.40)$$

Tomando as componentes da equação acima em coordenadas polares, teremos

$$F_x = -kr \cos q \quad (5.41)$$

$$F_x = -kx = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (5.42)$$

$$F_y = -kr \sin q \quad (5.43)$$

$$F_y = -ky = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (5.44)$$

Escrevendo

$$w_0^2 = \frac{k}{m} \quad (5.45)$$

as equações (5.42) e (5.44) são escritas da forma

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.46)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0 \quad (5.47)$$

cujas soluções são dadas por

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - a) \quad (5.48)$$

$$y(t) = B \cos(\omega_0 t - b) \quad (5.49)$$

que representam dois osciladores harmônicos simples que se movimentam nas direções x e y com mesma frequência de oscilação, mas com amplitudes e fases diferentes. Para obtermos a equação da trajetória da partícula, devemos eliminar o tempo entre as equações (5.48) e (5.49). De (5.49), temos que

$$y(t) = B \{ \cos[\omega_0 t - a + (a - b)] \} \quad (5.50)$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad (5.51)$$

na equação (5.50), teremos

$$y(t) = B \cos(\omega_0 t - a) \cos(a - b) - B \sin(\omega_0 t - a) \sin(a - b) \quad (5.52)$$

De (5.48), temos que

$$\cos(\omega_0 t - a) = \frac{x}{A} \quad (5.53)$$

Substituindo (5.53) em (5.52) e considerando que a diferença de fase seja igual a d

$$d = a - b \quad (5.54)$$

e que

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t - a) &= [1 - \cos^2(\omega_0 t - a)]^{1/2} \\ &= \left[1 - \left(\frac{x}{A} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.55)$$

teremos

$$y(t) = B \frac{x}{A} \cos d - B \left[1 - \left(\frac{x}{A} \right)^2 \right]^{1/2} \sin d \quad (5.56)$$

$$(Ay - Bx \cos d) = -AB \left[1 - \left(\frac{x}{A} \right)^2 \right]^{1/2} \sin d \quad (5.57)$$

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado,

$$\begin{aligned}
 (Ay - Bx \cos d)^2 &= (AB)^2 \left[1 - \left(\frac{x}{A} \right)^2 \right] \sin^2 d \\
 A^2 y^2 + B^2 x^2 \cos^2 d - 2ABxy \cos d &= A^2 B^2 \sin^2 d - B^2 x^2 \sin^2 d \\
 A^2 y^2 + B^2 x^2 [\cos^2 d + \sin^2 d] - 2ABxy \cos d &= A^2 B^2 \sin^2 d \\
 A^2 y^2 + B^2 x^2 - 2ABxy \cos d &= A^2 B^2 \sin^2 d
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

Para resolvermos a equação (5.58) precisamos saber o valor de d :

A) Para $d = \pm \frac{\pi}{2}$

$$\cos d = 0 \text{ e } \sin^2 d = 1 \tag{5.59}$$

a equação (5.58) se reduz a

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2 \tag{5.60}$$

Dividindo a equação (5.60) por $A^2 B^2$,

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1 \tag{5.61}$$

vemos que esta é a equação de uma elipse. Para $A=B$, teremos uma circunferência.

B) Para $d = 0$

$$\sin d = 0 \text{ e } \cos d = 1$$

a equação (5.58) se reduz a

$$A^2 y^2 - 2ABxy + B^2 x^2 = 0 \tag{5.62}$$

cujas fatoração é dada por

$$(Ay - Bx)^2 = 0 \tag{5.63}$$

Assim,

$$y = \frac{B}{A} x \tag{5.64}$$

que é a equação de uma reta que passa pela origem com coeficiente angular B/A .

C) Para $d = \pm \pi$

$$\sin d = 0 \text{ e } \cos d = -1$$

a equação (5.58) se reduz a

$$A^2 y^2 + 2ABxy + B^2 x^2 = 0 \tag{5.65}$$

cuja fatoração é dada por

$$(Ay + Bx)^2 = 0 \quad (5.66)$$

Assim,

$$y = -\frac{B}{A}x \quad (5.67)$$

que é a equação de uma reta que passa pela origem com coeficiente angular $-(B/A)$. Todos os outros valores de d levam a uma elipse. Isso pode ser visto da seguinte forma: a equação quadrática tem uma forma geral

$$ax^2 + bxy + cy^2 + ey = f \quad (5.68)$$

A forma da curva depende do valor do discriminante D

$$D = b^2 - 4ac \quad (5.69)$$

Para $D > 0$, a curva é uma hipérbole; para $D = 0$ a curva é uma parábola e para $D < 0$, a curva é uma elipse. Comparando (5.58) com (5.68), teremos que

$$a = B^2 \quad (5.70)$$

$$b = -2AB\cos d \quad (5.71)$$

$$c = A^2 \quad (5.72)$$

$$D = 4A^2B^2\cos^2 d - 4(B^2)A^2 \quad (5.73)$$

$$D = 4A^2B^2[\cos^2 d - 1]$$

$$D = -4A^2B^2\sin^2 d \quad (5.74)$$

Como $D < 0$, a curva é uma elipse. Mostramos na figura 5-4 as curvas para alguns valores de d ($0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/4, 5\pi/6$ e π), com $A=2$ e $B=4$.

Para o caso mais geral, onde as constantes das molas K 's são diferentes, as equações tomariam a forma

$$x = A\cos(w_x t - a) \quad (5.75)$$

$$y = B\cos(w_y t - b) \quad (5.76)$$

em que

$$w_x^2 = k_x/m \quad (5.77)$$

$$w_y^2 = k_y/m \quad (5.78)$$

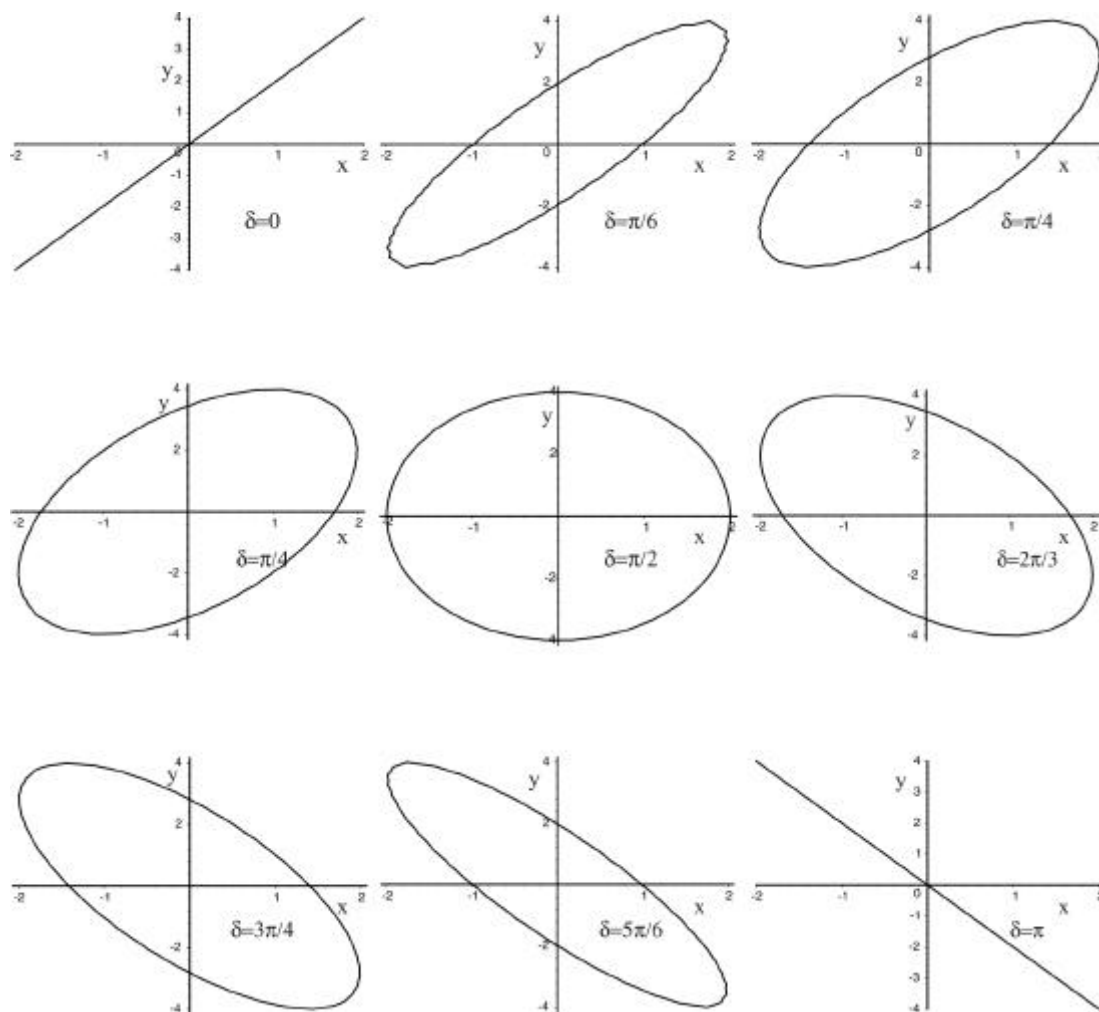


Figura 5-4

As curvas descritas por essas equações são denominadas de Figuras de Lissajous; serão fechadas se e somente se as frequências w_x e w_y forem comensuráveis, isto é, se a razão w_x/w_y for uma fração racional. A figura 5-5 mostra o caso para

$$w_x/w_y = \frac{4}{3}, \quad A = 2, B = 4 \quad \text{e} \quad a = b = 0$$

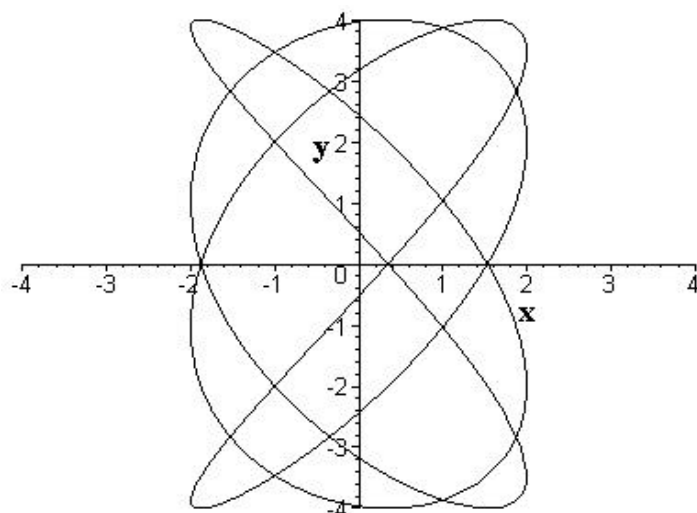


Figura 5-5

As Figuras de Lissajous são fortemente dependentes da diferença de fase d . A figura 5-6 mostra as curvas para $w_x/w_y = 1/2$ para diferentes valores de d (0 , $\pi/3$ e $\pi/4$).

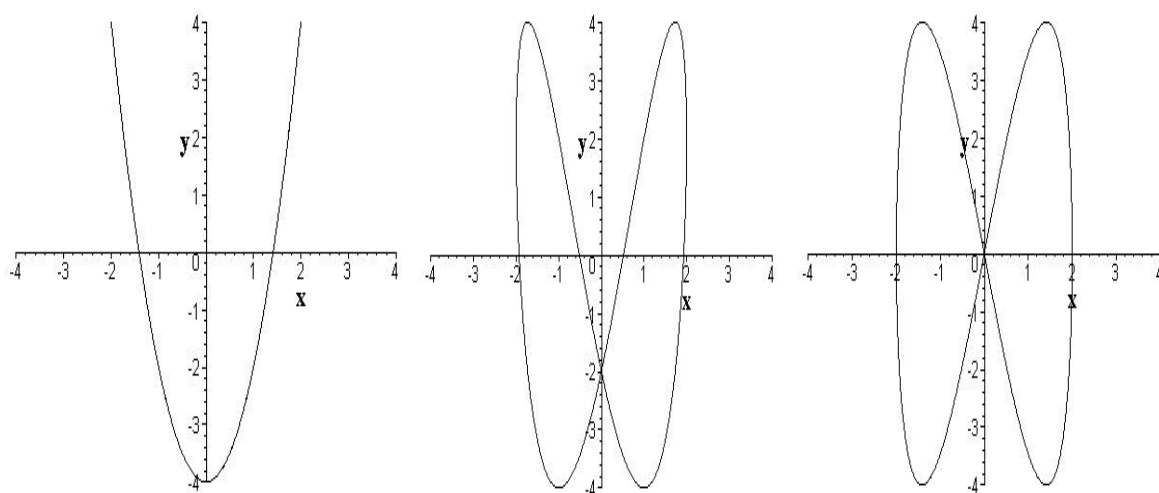


Figura 5-6

Uma outra forma de abordarmos o problema consiste em escrevermos as frequências w_x e w_y da forma

$$\sqrt{\frac{k_x}{m}} = w \quad (5.79)$$

$$\sqrt{\frac{k_y}{m}} = w + w' \quad (5.80)$$

Isto é, temos um oscilador anisotrópico, com diferentes constantes de mola nas direções x e y , dadas por k_x e k_y , cujas frequências de oscilação diferem entre si por uma quantidade

ω' . No instante $t = 0$, consideraremos que este esteja em fase, isto é, $\alpha = \beta = 0$. Assim, as equações de movimento tomarão a forma

$$x = A \cos \omega t \quad (5.81)$$

$$y = B \cos(\omega + \omega')t \quad (5.82)$$

O movimento só será periódico se houver dois números inteiros P e Q tal que

$$\omega P = 2\pi Q \quad (5.83)$$

$$(\omega + \omega')P = 2\pi Q \quad (5.84)$$

Isto é, a razão entre as duas frequências seja um número racional.

Caso a razão entre as frequências não possa ser escrita como um número racional, a curva descrita será aberta e após um longo tempo irá preencher todo o espaço limitado pelo retângulo de lados $2A \times 2B$. Mostramos esse comportamento na figura 5-7, onde graficamos as equações (5.81) e (5.82), com $\omega = \sqrt{2}$ e $\omega + \omega' = 3$, para diferentes variações de t .

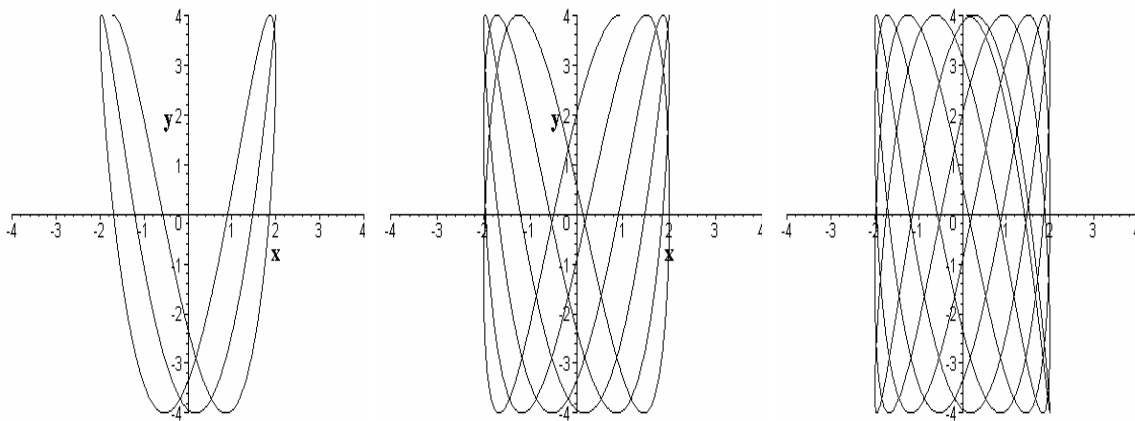


Figura 5-7

Quando $A=B=C$, podemos reescrever as equações (5.81) e (5.82) da forma

$$x = C \cos \omega t \quad (5.85)$$

$$y = C \cos(\omega + \omega')t \quad (5.86)$$

Expandindo a equação acima em conformidade com (5.51)

$$y = C \cos \omega t \cos \omega' t - C \sin \omega t \sin \omega' t \quad (5.87)$$

Resolvendo (5.85) para $\cos \omega t$

$$\cos \omega t = (x/C) \quad (5.88)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} wt &= \left[1 - \cos^2 wt\right]^{1/2} \\ \operatorname{sen} wt &= \left[1 - (x/C)^2\right]^{1/2}\end{aligned}\quad (5.89)$$

Substituindo agora (5.88) e (5.89) em (5.87)

$$\begin{aligned}y &= C \cdot \frac{x}{C} \cos w't - C \left[1 - (x/C)^2\right]^{1/2} \operatorname{sen} w't \\ y - x \cos w't &= -C \left[1 - (x/C)^2\right]^{1/2} \operatorname{sen} w't\end{aligned}$$

Tomando o quadrado da equação acima

$$\begin{aligned}(y - x \cos w't)^2 &= C^2 \left[1 - (x/C)^2\right] \operatorname{sen}^2 w't \\ y^2 - 2xy \cos w't + x^2 \cos^2 w't &= C^2 \operatorname{sen}^2 w't - x^2 \operatorname{sen}^2 w't \\ y^2 - 2xy \cos w't + x^2 (\cos^2 w't + \operatorname{sen}^2 w't) &= C^2 \operatorname{sen}^2 w't\end{aligned}\quad (5.90)$$

Fazendo uma mudança de variável do tipo

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \quad (5.91)$$

$$y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \quad (5.92)$$

(que equivale a uma rotação de 45°), podemos escrever a equação (5.90) da forma

$$\begin{aligned}\frac{(x' + y')^2}{2} - 2 \frac{(x' - y')(x' + y')}{2} \cos w't + \frac{(x' - y')^2}{2} &= C^2 \operatorname{sen}^2 w't \quad (5.93) \\ \frac{(x'^2 + 2x'y' + y'^2)}{2} - (x'^2 - y'^2) \cos w't + \frac{(x'^2 - 2x'y' + y'^2)}{2} &= C^2 \operatorname{sen}^2 w't \\ x'^2 + y'^2 - x'^2 \cos w't + y'^2 \cos w't &= C^2 \operatorname{sen}^2 w't \\ x'^2 (1 - \cos w't) + y'^2 (1 + \cos w't) &= C^2 \operatorname{sen}^2 w't\end{aligned}\quad (5.94)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}\frac{(1 - \cos w't)}{2} &= \operatorname{sen}^2 \frac{w't}{2} \\ \frac{(1 + \cos w't)}{2} &= \cos^2 \frac{w't}{2} \\ \operatorname{sen}^2 w't &= 4 \operatorname{sen}^2 \frac{w't}{2} \cos^2 \frac{w't}{2}\end{aligned}\quad (5.95)$$

Utilizando as identidades acima em (5.94),

$$x'^2 2 \sin^2 \frac{\omega' t}{2} + y'^2 2 \cos^2 \frac{\omega' t}{2} = C^2 4 \sin^2 \frac{\omega' t}{2} \cos^2 \frac{\omega' t}{2}$$

Dividindo a equação acima por

$$4C^2 \sin^2 \frac{\omega' t}{2} \cos^2 \frac{\omega' t}{2}$$

teremos

$$\frac{x'^2}{2C^2 \cos^2 \frac{\omega' t}{2}} + \frac{y'^2}{2C^2 \sin^2 \frac{\omega' t}{2}} = 1 \quad (5.96)$$

que pode ser identificada como a equação de uma elipse cujos eixos mudam no tempo de zero a $2\sqrt{2}C$.

5-4 O OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO

Oscilações livres são sistemas ideais. Na prática, forças dissipativas sempre atuam em qualquer sistema, que em certos casos podem ser representadas por uma força do tipo $-b\dot{x}$, com $b > 0$. Assim, a equação de movimento para um oscilador harmônico amortecido será dada por

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} \quad (5.97)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (5.98)$$

cuja equação característica é

$$\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0 \quad (5.99)$$

As raízes $\lambda_{1,2}$ da equação acima são dadas por

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2} \quad (5.100)$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2m} [b^2 - 4km]^{1/2} \quad (5.101)$$

Fazendo

$$\alpha = \frac{b}{2m} \quad (5.102)$$

$$b = \frac{1}{2m} [b^2 - 4km]^{1/2} \quad (5.103)$$

teremos

$$\begin{aligned} l_1 &= -a + b \\ l_2 &= -a - b \end{aligned} \quad (5.104)$$

Para $b^2 \neq 4mk$, a solução geral será

$$x(t) = e^{-at} [c_1 e^{bt} + c_2 e^{-bt}] \quad (5.105)$$

Dependendo do valor de b , teremos 3 casos:

1º Caso - **Superamortecimento**

Quando b é grande, de forma que

$$b^2 > 4mk \quad (5.106)$$

Nesse caso, as raízes serão reais e distintas

$$l_1 = -a + b \quad (5.107)$$

$$l_2 = -a - b \quad (5.108)$$

e a solução geral será dada por

$$x(t) = A_1 e^{-(a-b)t} + A_2 e^{-(a+b)t} \quad (5.109)$$

que é uma função não oscilatória. O último termo da equação de movimento [equação (5.109)] irá tender a zero mais rapidamente que o primeiro, que também irá tender a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Observando a equação (5.109) vemos que, dependendo das condições iniciais, $x(t)$ pode tornar-se negativo antes de tender assintoticamente a zero. Vejamos como isso acontece: Sejam x_0 e v_0 a posição e a velocidade no instante de tempo $t = 0$. Aplicando essas condições a (5.109), teremos

$$x(0) = x_0 = A_1 + A_2 \quad (5.110)$$

$$\dot{x}(t) = A_1 [-(a-b)] e^{-(a-b)t} + A_2 [-(a+b)] e^{-(a+b)t}$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -A_1(a-b) - A_2(a+b) \quad (5.111)$$

Precisamos resolver (5.110) e (5.111)

$$\begin{cases} x_0 = A_1 + A_2 \\ v_0 = -A_1(a-b) - A_2(a+b) \end{cases}$$

Aplicando a regra de Kramer, teremos

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -(a-b) & -(a+b) \end{vmatrix} \\
\Delta &= -(a+b) + (a-b) \\
&= -a - b + a - b \\
&= -2b
\end{aligned} \tag{5.112}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{A_1} &= \begin{vmatrix} x_o & 1 \\ v_o & -(a+b) \end{vmatrix} \\
&= -x_o(a+b) - v_o
\end{aligned} \tag{5.113}$$

$$\begin{aligned}
D_{A_2} &= \begin{vmatrix} 1 & x_o \\ -(a-b) & v_o \end{vmatrix} \\
&= v_o + x_o(a-b)
\end{aligned} \tag{5.114}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\Delta_{A_1}}{\Delta} \\
A_1 &= \frac{-x_o(a+b) - v_o}{-2b} \\
A_1 &= \frac{x_o(a+b) + v_o}{2b}
\end{aligned} \tag{5.115}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{\Delta_{A_2}}{\Delta} \\
A_2 &= \frac{x_o(a-b) + v_o}{-2b} \\
A_2 &= -\left[\frac{x_o(a-b) + v_o}{2b} \right]
\end{aligned} \tag{5.116}$$

Para valores positivos de x_o e v_o : $A_1 > 0$; $A_2 < 0$; em módulo, $A_1 > A_2$. Neste caso, $x(t)$ tem um máximo e depois tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Para valores de x_o positivo e v_o negativo, onde a condição

$$v_o < x_o(a-b) \tag{5.117}$$

seja satisfeita, A_1 será negativo, enquanto A_2 será positivo. Entretanto, A_2 será, em módulo, maior que A_1 . Como o termo de A_2 decai mais rapidamente do que o termo de A_1 , $x(t)$ será

negativo para algum valor de t antes de tender assintoticamente a zero. Se $x_0 > 0$ e $v_0 = 0$, $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ sem ter máximo nem valores negativos.

A figura 5-8 mostra os gráficos de $x(t)$ para diferentes valores da constante de amortecimento b (3, 5 e 7), quando $x_0 = 2$, $v_0 = 0$, $m=1$, $k=1$. Na figura 5-9, temos os gráficos de $x(t)$ para uma mesma constante de amortecimento $b=5$, $m=1$, $k=1$, e $x_0=2$, para diferentes valores de v_0 (-15, 0 e 5).

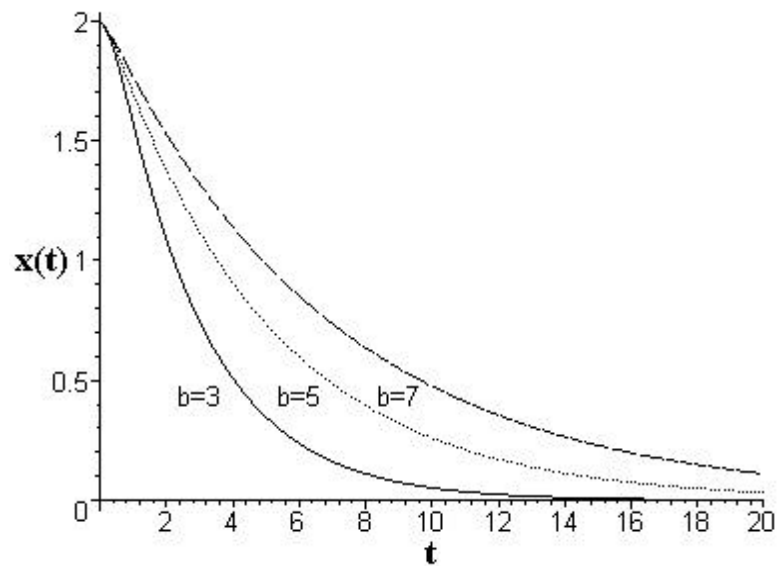


Figura 5-8

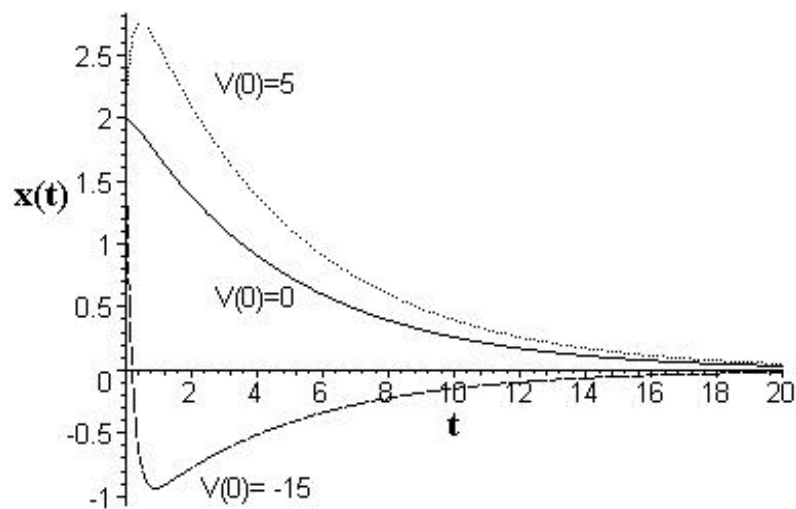


Figura 5-9

2º Caso - *Subamortecimento*

Quando b é pequeno, de forma que

$$b^2 < 4km \quad (5.118)$$

as raízes são complexas

$$l_1 = -a + iw \quad (5.119)$$

$$l_2 = -a - iw \quad (5.120)$$

em que

$$w = \frac{1}{2m} [4km - b^2]^{1/2} > 0 \quad (5.121)$$

A solução geral será dada por

$$x(t) = e^{-at} [A \cos wt + B \sin wt] \quad (5.122)$$

$$x(t) = e^{-at} C \cos(wt - d) \quad (5.123)$$

em que

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (5.124)$$

$$\tan d = \frac{B}{A} \quad (5.125)$$

Mostramos na figura 5-10, o gráfico da equação (5.123) para diferentes valores de m (3, 5 e 7), com $b=1$, $k=1$, $x_0=2$ e $v_0=0$.

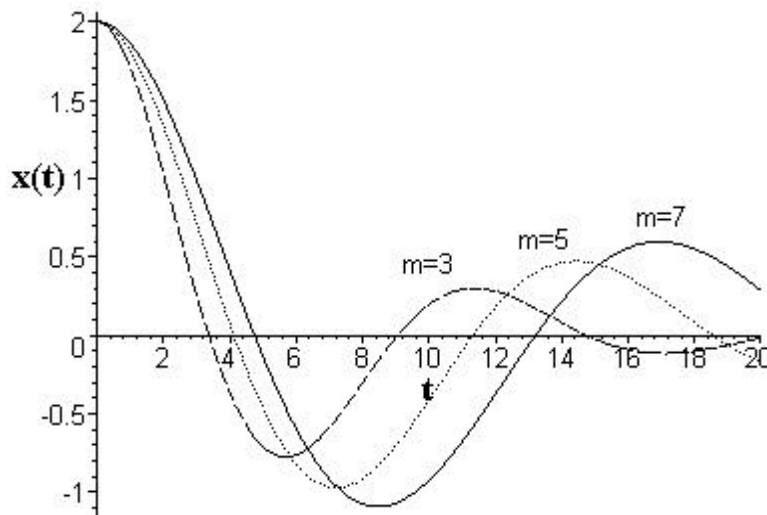


Figura 5-10

Vemos que esta é uma função oscilatória, onde o atrito introduz um decaimento exponencial na amplitude.

O movimento não será periódico, uma vez que o oscilador nunca passa no mesmo ponto com a mesma velocidade. Entretanto, podemos definir um “período” como o tempo gasto entre dois máximos sucessivos. Assim,

$$P = \frac{2p}{w}$$

em que w é a “frequência angular” do oscilador harmônico amortecido, dado pela equação (5.121).

A razão entre as amplitudes de dois máximos sucessivos será dada por

$$\frac{Ae^{-at}}{Ae^{-a(t+p)}} = e^{ap}$$

que é denominado de decremento do movimento. O logaritmo dessa razão é conhecido como decremento logarítmico do movimento (g)

$$g = \ln e^{ap}$$

$$g = aP \quad (5.128)$$

Vejamos agora como é dissipada a energia do sistema. Sabemos que

$$x(t) = Ce^{-at} \cos(wt - d)$$

Derivando em relação a t

$$\dot{x}(t) = -Cae^{-at} \cos(wt - d) - Cwe^{-at} \sin(wt - d) \quad (5.129)$$

A energia total do sistema será

$$E = T + U$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$= \frac{1}{2} mC^2 e^{-2at} \left\{ [a \cos(wt - d) + w \sin(wt - d)]^2 + w^2 \cos^2(wt - d) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} mC^2 e^{-2at} f(t) \quad (5.130)$$

em que

$$f(t) = \{ [a \cos(wt - d) + w \sin(wt - d)]^2 + w^2 \cos^2(wt - d) \}$$

é uma função periódica

$$f(t) = f(t + P)$$

Assim,

$$E(t + P) = E(t) e^{-2aP} \quad (5.133)$$

$$E(P) = E(O)e^{-2aP} \quad (5.134)$$

que nos diz que após um intervalo de tempo P , a energia tem um valor que é e^{-2aP} vezes o valor da energia do começo. Esse decaimento é caracterizado pelo tempo τ que o sistema leva para que a energia caia de $e^{-1} = 0,368$ do valor original

$$t = \frac{1}{2a} = \frac{m}{b} \quad (5.135)$$

Sabemos que a equação de movimento para o oscilador harmônico amortecido é dada pela equação (5.97). Multiplicando esta por dx/dt , teremos

$$m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \frac{dx}{dt} - b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (5.136)$$

$$m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + kx \frac{dx}{dt} = -b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (5.137)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right] = -b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (5.138)$$

O lado esquerdo da equação (5.138) nos dá a taxa de mudança da energia total do sistema (energia cinética mais energia potencial). O direito, a taxa com que essa energia está sendo dissipada, isto é,

$$\frac{dE}{dt} = -b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (5.139)$$

Mostramos na figura 5-11 os gráficos de como a energia decai no tempo e a taxa desse decaimento, para $m=3$, $b=1$, $k=1$, $x_0=2$ e $v_0=0$.

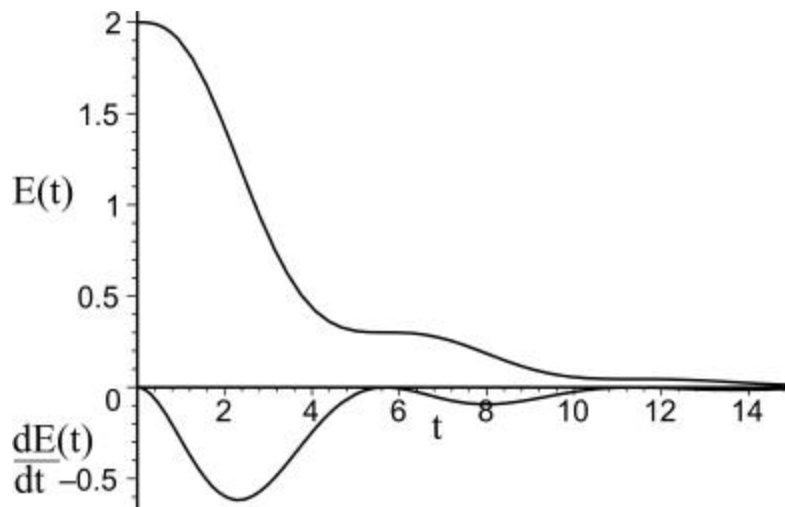


Figura 5-11

O grau de amortecimento é freqüentemente especificado pela grandeza sem dimensão Q , denominada de fator de qualidade, que é definida como a razão entre a energia armazenada no oscilador e a energia dissipada por radiano. Da equação (5.134), podemos calcular

$$\Delta E = \left| \frac{dE}{dt} \right| \Delta t \quad (5.140)$$

$$\Delta E = 2aE\Delta t \quad (5.141)$$

O período que o sistema oscila de 2π radianos é dado por

$$T = \frac{2p}{w}$$

logo, o tempo que o sistema gasta para oscilar de um radiano será

$$t = \frac{T}{2p} = \frac{1}{w} \quad (5.142)$$

Substituindo (5.142) em (5.141), teremos

$$\Delta E = \frac{2aE}{w} \quad (5.143)$$

assim, Q será dado por

$$Q = \frac{E}{2aE/w} = \frac{w}{2a} \quad (5.144)$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2m} [4mk - b^2]^{1/2} = \frac{1}{2a} \left[\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} \right]^{1/2}$$

$$Q = \frac{1}{2a} \left[w_0^2 - \frac{b^2}{4m^2} \right]^{1/2} = \frac{1}{4ma} [4mk - b^2]^{1/2} \quad (5.145)$$

3º Caso - *Amortecimento crítico*

Quando

$$b^2 = 4mk \quad (5.146)$$

as raízes serão iguais

$$l_1 = l_2 = -a \quad (5.147)$$

e a solução será do tipo

$$x(t) = [c_1 + c_2 t] e^{-at} \quad (5.148)$$

que é uma função não oscilatória. Analisando esta função, vemos que:

a) Quando $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$

b) Como a função exponencial é sempre não nula, $x(t)$ poderá, no máximo, ter um zero no ponto onde

$$c_1 + c_2 t = 0 \quad (5.149)$$

Isso poderá acontecer quando

$$x_o > 0 \text{ e } v_o < 0$$

c) Caso as condições iniciais não permitam a condição b, isto é, caso c_1 e c_2 sejam positivos, teremos 2 casos possíveis:

1) Quando

$$x_o > 0$$

$$v_o > 0$$

A função $x(t)$ terá um máximo no ponto onde

$$\dot{x}(t) = 0$$

$$\dot{x}(t) = c_2 e^{-at} + [c_1 + c_2 t](-a) e^{-at} = 0 \quad (5.150)$$

$$c_2 - c_1 a - c_2 a t = 0 \quad (5.151)$$

$$t = \frac{c_2 - c_1 a}{c_2 a}$$

$$t = \frac{1}{a} - \frac{c_1}{c_2} \quad (5.152)$$

2) Quando

$$x_o > 0$$

$$v_o = 0$$

$x(t)$ terá o seu valor máximo em $t = 0$. $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Mostramos na figura 5-12 os diferentes tipos de comportamento de $x(t)$, [equação (5.148)], para $b=2$, $m=1$, $k=1$, $x_o=2$ e diferentes valores de v_o (-10, 0 e 5).

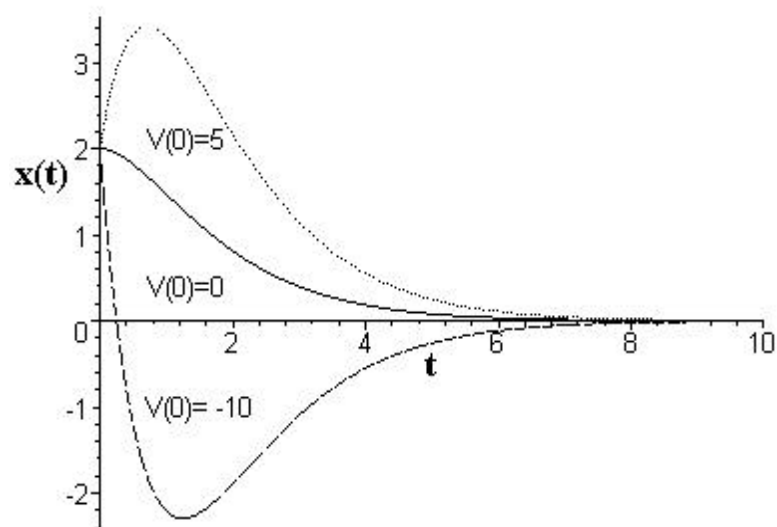


Figura 5-12

Devemos observar que $x(t) \rightarrow 0$ mais rapidamente para o caso do amortecimento crítico.

A figura 5-13 mostra os gráficos para os casos de superamortecimento ($b=3$), subamortecimento ($b=1$) e amortecimento crítico ($b=2$) para o caso de $m=1$, $k=1$, $x_0=2$ e $v_0=0$.

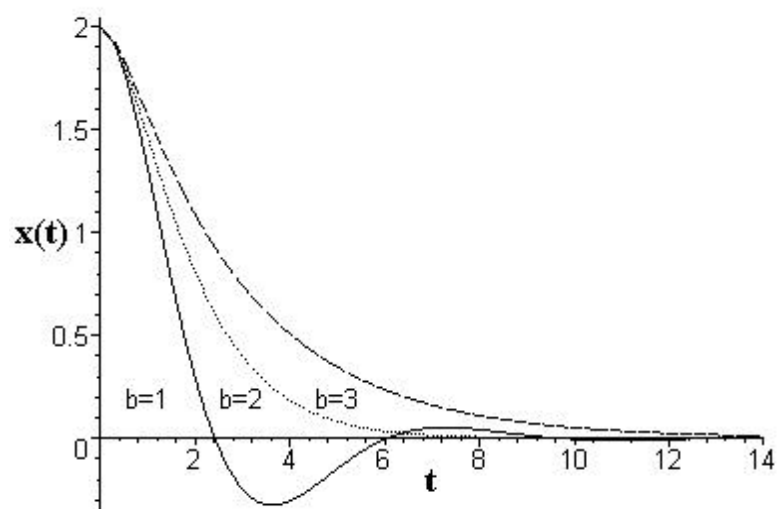


Figura 5-13

5-5 O OSCILADOR HARMÔNICO FORÇADO

Vimos na seção anterior que a equação de movimento para o oscilador harmônico amortecido é dada por

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (5.153)$$

O oscilador harmônico forçado consiste em introduzirmos uma força externa $f(t)$ no sistema. Nesse caso, a equação de movimento ficará

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = f(t) \quad (5.154)$$

Nessa seção abordaremos o caso quando $f(t)$ tem a forma

$$f(t) = F_o \cos wt \quad (5.155)$$

Isto é, precisamos resolver a equação não homogênea

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_o \cos wt \quad (5.156)$$

cuja solução geral será do tipo

$$x(t) = x_H + x_P \quad (5.157)$$

onde x_H é a solução da equação homogênea, problema já resolvido na seção anterior, e x_P é a solução particular do problema.

Utilizaremos o método dos coeficientes a determinar para obtermos a solução particular do problema. Supondo que a solução particular seja do tipo

$$x_P = A \cos wt + B \sin wt \quad (5.158)$$

calculando as derivadas de x_P

$$\dot{x}_P = -wA \sin wt + wB \cos wt \quad (5.159)$$

$$\ddot{x}_P = -w^2 [A \cos wt + B \sin wt] \quad (5.160)$$

e substituindo na equação diferencial [equação (5.156)], teremos

$$\begin{aligned} -mw^2 [A \cos wt + B \sin wt] + bw [-A \sin wt + B \cos wt] + \\ + k [A \cos wt + B \sin wt] = F_o \cos wt \end{aligned} \quad (5.161)$$

Colocando em evidência os termos semelhantes,

$$[-mw^2 A + bwB + kA] \cos wt + [-mw^2 B - bwA + kB] \sin wt = F_o \cos wt \quad (5.162)$$

$$[A(k - mw^2) + B(bw)] \cos wt + [B(k - mw^2) - A(bw)] \sin wt = F_o \cos wt \quad (5.163)$$

e igualando os termos iguais de ambos os lados da equação, teremos duas equações

$$A(k - m\omega^2) + B(b\omega) = F_o \quad (5.164)$$

$$-A(b\omega) + B(k - m\omega^2) = 0 \quad (5.165)$$

Resolveremos estas equações utilizando o método de Kramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & b\omega \\ -b\omega & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = (k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2 \quad (5.166)$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} F_o & b\omega \\ 0 & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = F_o(k - m\omega^2) \quad (5.167)$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & F_o \\ -b\omega & 0 \end{vmatrix} = F_o b\omega \quad (5.168)$$

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta} = \frac{F_o(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \quad (5.169)$$

$$A = \frac{F_o m(k/m - \omega^2)}{m^2(k/m - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}$$

Como $\omega_o^2 = k/m$

$$A = \frac{F_o(\omega_o^2 - \omega^2)}{m(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2/m} \quad (5.170)$$

$$B = \frac{\Delta_B}{\Delta} = \frac{F_o b\omega}{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \quad (5.171)$$

$$B = \frac{F_o b\omega}{m^2(k/m - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}$$

$$B = \frac{F_o b\omega}{m^2(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2} \quad (5.172)$$

Faremos agora a análise quando o amortecimento é nulo ($b = 0$) e quando o amortecimento é diferente de zero.

Para amortecimento nulo, devemos considerar dois casos:

1 – Para $\omega^2 \neq \omega_o^2$

2 – Para $\omega = \omega_o$

Quando $w^2 \neq w_o^2$, das equações (5.167), (5.169) e (5.172), teremos que

$$A = \frac{F_o}{m(w_o^2 - w^2)} \quad (5.173)$$

$$B = 0 \quad (5.174)$$

Assim, a solução geral será do tipo

$$x(t) = x_H + x_P$$

$$x(t) = C \cos(w_o t - d) + \frac{F_o}{m(w_o^2 - w^2)} \cos wt \quad (5.175)$$

que é a superposição de dois osciladores harmônicos com frequências w e w_o .

Considerando apenas a solução particular x_P , temos

$$x_P(t) = \frac{F_o}{m(w_o^2 - w^2)} \cos wt \quad (5.176)$$

$$\begin{aligned} x_P(t) &= \frac{F_o \cos wt}{m w_o^2 [1 - (w/w_o)^2]} \\ &= \frac{F_o \cos wt}{k [1 - (w/w_o)^2]} \end{aligned} \quad (5.177)$$

$$x_P(t) = \frac{F_o}{k} r \cos wt \quad (5.178)$$

em que

$$r = \frac{1}{[1 - (w/w_o)^2]} \quad (5.179)$$

O máximo de x_P é obtido em $t = 0$, e é dado por

$$x_{Pmax} = \frac{F_o r}{k} \quad (5.180)$$

Quando $w \rightarrow w_o$, r e $x_{Pmax} \rightarrow \infty$. Esse efeito é denominado de ressonância e o fator r de fator ressonante. Mostramos na figura 5-14 o gráfico de r , com $w_o = 1$. Lembre-se que a constante de amortecimento b é nula.

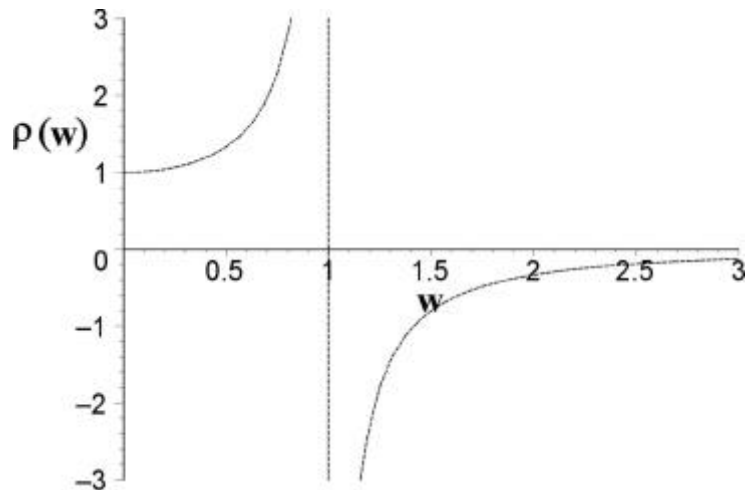


Figura 5-14

Quando $w = w_o$, devemos resolver a equação diferencial

$$\ddot{x} + w_o^2 x = \frac{F_o}{m} \cos w_o t \quad (5.181)$$

A solução da homogênea é do tipo

$$x_H = A_1 \cos w_o t + A_2 \sin w_o t \quad (5.182)$$

Resolveremos a solução particular pelo método dos coeficientes a determinar. A solução proposta será do tipo

$$x_p = t x_H$$

$$x_p(t) = t[A \cos w_o t + B \sin w_o t] \quad (5.183)$$

$$\dot{x}_p(t) = A \cos w_o t + B \sin w_o t + t[-w_o A \sin w_o t + w_o B \cos w_o t] \quad (5.184)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p(t) = & -w_o A \sin w_o t + w_o B \cos w_o t - w_o A \sin w_o t + w_o B \cos w_o t + \\ & + t[-w_o^2 A \cos w_o t - w_o^2 B \sin w_o t] \end{aligned} \quad (5.185)$$

$$\ddot{x}_p = 2[-w_o A \sin w_o t + w_o B \cos w_o t] - t w_o^2 [A \cos w_o t + B \sin w_o t] \quad (5.186)$$

Substituindo na equação diferencial (5.181) os valores de $\dot{x}_p$ [equação (5.184)] e $\ddot{x}_p$ [equação (5.186)], teremos

$$\begin{aligned} & 2[-w_o A \sin w_o t + w_o B \cos w_o t] - t w_o^2 [A \cos w_o t + B \sin w_o t] + \\ & w_o^2 t [A \cos w_o t + B \sin w_o t] = \frac{F_o}{m} \cos w_o t \end{aligned} \quad (5.187)$$

$$2[-w_o A \sin w_o t + w_o B \cos w_o t] = \frac{F_o}{m} \cos w_o t$$

Igualando termo a termo de ambos os lados da equação, teremos

$$-2\omega_o A = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (5.188)$$

$$2\omega_o B = \frac{F_o}{m} \Rightarrow B = \frac{F_o}{2m\omega_o} \quad (5.189)$$

Assim, x_p será do tipo

$$x_p(t) = \frac{F_o t}{2m\omega_o} \sin \omega_o t \quad (5.190)$$

Observando a equação acima, vemos que a amplitude de oscilação irá aumentar linearmente com o tempo, conforme mostra a figura 5-15, tornando o sistema não estável. Nessa figura usamos $F_o / 2m = 1$ e $\omega_o = 1$.

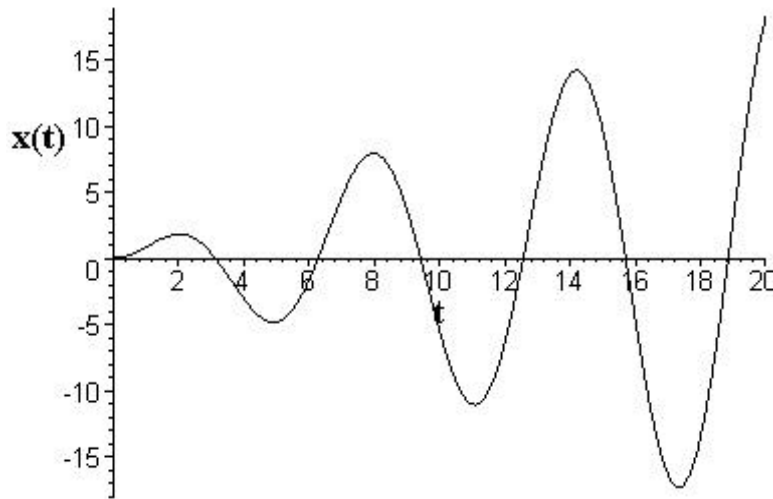


Figura 5-15

Para

$$\omega \cong \omega_o \quad (5.191)$$

a solução será dada por (5.175)

$$x(t) = C \cos(\omega_o t - d) + \frac{F_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2)} \cos \omega t \quad (5.192)$$

Aplicaremos a esse sistema as seguintes condições iniciais

$$x(0) = 0 \quad (5.193)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad (5.194)$$

assim, de (5.192) e (5.193)

$$C \cos(-d) = \frac{-F_o}{m(w_o^2 - w^2)} \quad (5.195)$$

$$C = \frac{-F_o}{\cos(-d)m(w_o^2 - w^2)} \quad (5.196)$$

De (5.192) e (5.194),

$$\dot{x}(t) = -Cw_o \sin(w_o t - d) - \frac{wF_o}{m(w_o^2 - w^2)} \sin wt \quad (5.197)$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$-Cw_o \sin(-d) = 0 \quad (5.198)$$

assim,

$$d = 0 \quad (5.199)$$

e a equação de movimento será

$$x(t) = \frac{F_o}{m(w_o^2 - w^2)} [\cos wt - \cos w_o t] \quad (5.200)$$

Como

$$\cos v - \cos u = 2 \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \quad (5.201)$$

podemos reescrever (5.200) da forma

$$x(t) = \frac{2F_o}{m(w_o^2 - w^2)} \sin\left(\frac{w_o - w}{2}\right) t \sin\left(\frac{w_o + w}{2}\right) t \quad (5.202)$$

Como $w \cong w_o$, $w_o - w$ é pequeno, de forma que

$$\sin\left(\frac{w_o + w}{2}\right) t \quad (5.203)$$

oscila rapidamente, enquanto

$$\sin\left(\frac{w_o - w}{2}\right) \quad (5.204)$$

tem um período bem grande. Mostramos na figura 5-16 o gráfico da equação (5.202), com $2F_o/m = 1$, $w_o = 0,9$ e $w = 1$.

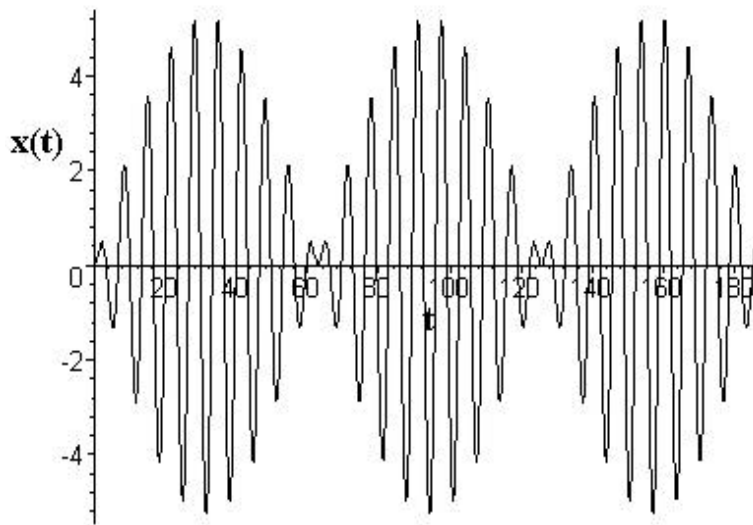


Figura 5-16

Esse fenômeno é conhecido como batimento, e consiste na superposição de duas oscilações com frequências próximas. Observe que o gráfico mostra como $\frac{2F_o}{m(w_o^2 - w^2)} \sin\left(\frac{w_o - w}{2}t\right)$

modula o termo $\sin\left(\frac{w_o + w}{2}t\right)$ na equação (5.202)

Quando o amortecimento do sistema é não nulo

$$b > 0$$

teremos que

$$a = \frac{b}{2m} > 0$$

A solução da equação homogênea é dada pela equação (5.105)

$$x_H(t) = e^{-at} [c_1 e^{bt} + c_2 e^{-bt}] \quad (5.105)$$

Procuraremos uma solução particular do tipo

$$x_p(t) = C \cos(wt - h) \quad (5.205)$$

Calculando as derivadas da equação acima

$$\dot{x}_p(t) = -Cw \sin(wt - h) \quad (5.206)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -Cw^2 \cos(wt - h) \quad (5.207)$$

e substituindo na equação diferencial (5.156), teremos

$$-Cw^2 \cos(wt - h) + \frac{b}{m} [-Cw \sin(wt - h)] + \frac{k}{m} C \cos(wt - h) = \frac{F_o}{m} \cos wt \quad (5.208)$$

expandindo $\cos(A + B)$ e $\sin(A + B)$, teremos

$$\begin{aligned} & -Cw^2 \cos wt \cos h - Cw^2 \sin wt \sin h - \frac{bCw}{m} \sin wt \cos h + \frac{bCw}{m} \sin h \cos wt \\ & + \frac{kC}{m} \cos wt \cos h + \frac{kC}{m} \sin wt \sin h = \frac{F_o}{m} \cos wt \end{aligned} \quad (5.209)$$

Colocando em evidência os termos semelhantes,

$$\begin{aligned} & \left[-Cw^2 \cos h + \frac{bCw}{m} \sin h + \frac{kC}{m} \cos h - \frac{F_o}{m} \right] \cos wt + \\ & + \left[-Cw^2 \sin h - \frac{bCw}{m} \cos h + \frac{kC}{m} \sin h \right] \sin wt = 0 \end{aligned} \quad (5.210)$$

que nos fornece as equações

$$\begin{cases} \left(-Cw^2 + \frac{kC}{m} \right) \cos h + \frac{bCw}{m} \sin h - \frac{F_o}{m} = 0 \\ \left(-Cw^2 + \frac{kC}{m} \right) \sin h - \frac{bCw}{m} \cos h = 0 \end{cases} \quad (5.211)$$

Como $k/m = w_o^2$, as equações acima podem ser escritas da forma

$$\begin{cases} mC(w_o^2 - w^2) \cos h + bwC \sin h - F_o = 0 \\ m(w_o^2 - w^2) \sin h - bw \cos h = 0 \end{cases} \quad (5.212)$$

$$bw \sin h + m(w_o^2 - w^2) \cos h = \frac{F_o}{C} \quad (5.213)$$

$$m(w_o^2 - w^2) \sin h - bw \cos h = 0 \quad (5.214)$$

Da equação (5.214),

$$\begin{aligned} \sin h [m(w_o^2 - w^2)] &= bw \cos h \\ \frac{\sin h}{\cos h} &= \frac{bw}{m(w_o^2 - w^2)} = \tan h \end{aligned} \quad (5.215)$$

assim, podemos escrever que

$$\sin h = \frac{bw}{\left[m^2 (w_o^2 - w^2)^2 + (bw)^2 \right]^{1/2}} \quad (5.216)$$

$$\cos h = \frac{m(\omega_o^2 - \omega^2)}{\left[m^2(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2 \right]^{1/2}} \quad (5.217)$$

uma vez que podemos interpretar o ângulo h de acordo com a figura 5.17.

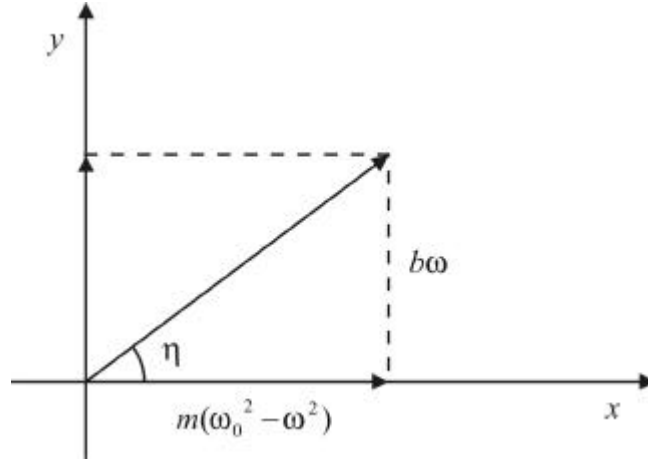


Figura 5-17

De (5.213), temos que

$$C = \frac{F_o}{bw \sin h + m(\omega_o^2 - \omega^2) \cos h} \quad (5.218)$$

Substituindo (5.216) e (5.217) em (5.218)

$$C = \frac{F_o}{\frac{(b\omega)^2 + m^2(\omega_o^2 - \omega^2)^2}{\left[m^2(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2 \right]^{1/2}}}$$

$$C = \frac{F_o}{\left[m^2(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2 \right]^{1/2}} \quad (5.219)$$

que nos permite escrever (5.205) da forma

$$x_p = \frac{F_o}{\left[m^2(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2 \right]^{1/2}} \cos(\omega t - h) \quad (5.220)$$

em que

$$h = \arctan \left[\frac{b\omega}{m(\omega_o^2 - \omega^2)} \right] \quad (5.221)$$

A solução geral será dada por

$$x(t) = x_H + x_p$$

onde x_H é dado pela equação (5.105) e x_p por (5.220). Da equação (5.105), vemos que $x_H \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, isto é, podemos considerar x_H como um transiente. Deste modo, a solução estacionária de $x(t)$ será dada por x_p .

Vejamos agora como se comporta a fase [equação (5.221)]:

A) Para $w < w_o$

Quando w tem a variação

$$0 < w < w_o$$

h tem a variação

$$0 < h < p/2$$

B) Para $w \geq w_o$

Quando w tem a variação

$$w_o < w < \infty$$

h tem a variação

$$p/2 \leq h < p$$

A figura 5-18 mostra esse comportamento, para $m=1, w_o=1$ e diferentes valores de b (0,05, 0,5, e 1).

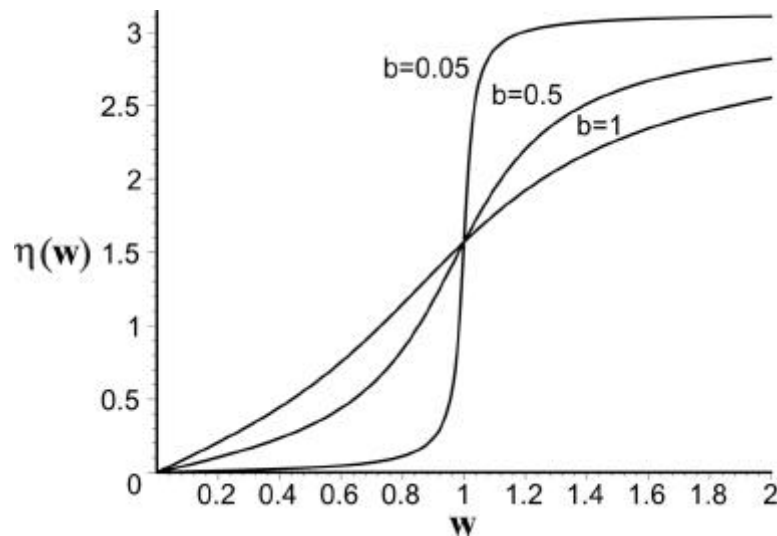


Figura 5-18

Veremos agora como a amplitude C , equação (5.219), varia com w . Derivando C em relação a w e igualando a zero, podemos obter o máximo de C

$$\left. \frac{dC}{dw} \right|_{w=w_R} = 0 \quad (5.222)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dw} &= \frac{F_o}{2} \left[m^2 (w_o^2 - w^2)^2 + (bw)^2 \right]^{-3/2} \cdot \left[2m^2 (w_o^2 - w^2)(-2w) + 2b^2 w \right] = 0 \\ -4w_R m^2 (w_o^2 - w_R^2) + 2b^2 w_R &= 0 \\ -2m^2 (w_o^2 - w_R^2) + b^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.223)$$

$$b^2 = 2m^2 (w_o^2 - w_R^2) \quad (5.224)$$

ou

$$w_R^2 = w_o^2 - b^2 / 2m^2 \quad (5.225)$$

que é a frequência de ressonância do sistema. Para sistemas onde o amortecimento é grande, isto é,

$$b^2 > 2m^2 w_o^2 \quad (5.226)$$

$$b^2 > 2mk$$

a equação (5.224) não tem solução real, de forma que C decresce monotonicamente quando w cresce. Para

$$b^2 \leq 2mk \quad (5.227)$$

teremos solução real $w = w_R$, que aumenta quando b decresce e tende a w_o quando $b \rightarrow 0$.

O valor de C [equação (5.219)] na ressonância [equação (5.225)] será dado por

$$\begin{aligned} C(w_R) &= \frac{F_o}{\left[m^2 (b^2 / 2m^2)^2 + (w_o^2 - b^2 / 2m^2) b^2 \right]^{1/2}} \\ C(w_R) &= \frac{F_o}{\left[m^2 \frac{b^4}{4m^4} + w_o^2 b^2 - \frac{b^4}{2m^2} \right]^{1/2}} \\ &= \frac{F_o}{\left[w_o^2 b^2 - b^4 / 4m^2 \right]^{1/2}} \\ C(w_R) &= \frac{2F_o m}{b \left[4m^2 w_o^2 - b^2 \right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (5.228)$$

Mostramos na figura 5-19 o gráfico da equação (5.219) com diferentes valores de b (0,25, 0,5, 1 e 2), com $F_o = 1$, $w_o = 1$ e $m = 1$.

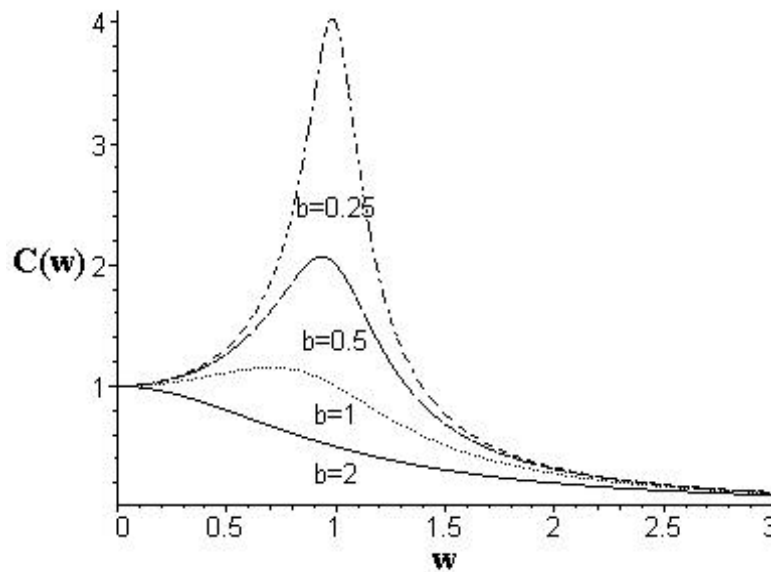


Figura 5-19

Observando esse gráfico, vemos que:

- a) $C(w_R)$ é finito para $b > 0$;
- b) desde que $dC(w_R)/db < 0$ quando $b^2 < 2mk$, o valor de $C(w_R)$ aumenta quando b diminui e tende ao infinito quando $b \rightarrow 0$.

Quando o amortecimento é pequeno, $b \cong 0$, teremos

$$C(w_R) = \frac{2F_o m}{b2mw_o} \quad (5.229)$$

$$= \frac{F_o}{bw_o} \quad (5.230)$$

que nos diz que $C(w_R)$ é inversamente proporcional a b . Isso significa que mesmo quando o amortecimento é pequeno devemos considerá-lo.

A origem da amplificação das oscilações por ressonância é entendida considerando a relação entre as fases da força externa aplicada e a velocidade. Quando $w \neq w_o$, $\dot{x}$ e $f(t)$ têm uma certa diferença de fase $d \neq 0$, fazendo com que a força e a velocidade tenham direções opostas, que gera o amortecimento. Na ressonância, a diferença de fase é nula, de forma que a força e a velocidade têm a mesma direção, de modo a gerar uma amplificação.

Um outro aspecto relevante é a forma do pico de ressonância. Consideraremos que o amortecimento é fraco

$$\frac{b^2}{2m^2} \ll \omega_o^2 \quad (5.231)$$

assim,

$$\omega_R \cong \omega_o \quad (5.232)$$

Perto da ressonância podemos fazer as seguintes aproximações em (5.219):

$$A) \omega_o^2 - \omega^2 = -(\omega + \omega_o)(\omega - \omega_o) \quad (5.233)$$

$$\cong 2\omega_o(\omega_o - \omega) \quad (5.234)$$

$$B) b\omega \cong b\omega_o \quad (5.235)$$

$$C \cong \frac{F_o}{\left[m^2 4\omega_o^2 (\omega_o - \omega)^2 + b^2 \omega_o^2 \right]^{1/2}} \quad (5.236)$$

$$C \cong \frac{F_o}{\omega_o \left\{ \left[2m(\omega_o - \omega) \right]^2 + b^2 \right\}^{1/2}} \quad (5.237)$$

Quando

$$|\omega_o - \omega| = b/2m \quad (5.238)$$

a equação (5.237) se reduz a

$$C = \frac{F_o}{\omega_o [2b^2]^{1/2}} \quad (5.239)$$

$$C = \frac{F_o}{b\omega_o \sqrt{2}} \quad (5.240)$$

Comparando com (5.230), vemos que

$$C = \frac{C(\omega_o)}{\sqrt{2}} \quad (5.241)$$

isto é, C decai por um fator $1/\sqrt{2}$ do seu valor de pico quando

$$\omega = \omega_o \pm a \quad (5.242)$$

em que

$$a = \frac{b}{2m} \quad (5.243)$$

Na equação anterior, o fator α é denominado de meia largura da ressonância. Como a altura do pico é inversamente proporcional a a [veja equações (5.230) e (5.243)] e

inversamente proporcional à largura, quanto menor o amortecimento mais estreita é a ressonância e mais alto é o pico.

Analisando a energia do sistema, podemos obter uma melhor compreensão deste. A energia cinética é dada por

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 C^2 \sin^2(\omega t - d) \end{aligned} \quad (5.244)$$

e a energia potencial U por

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} m x^2 \\ &= \frac{1}{2} C^2 k \cos^2(\omega t - d) \end{aligned} \quad (5.245)$$

assim, a energia total E será

$$\begin{aligned} E &= T + U \\ E &= \frac{1}{2} C^2 [m \omega^2 \sin^2(\omega t - d) + k \cos^2(\omega t - d)] \end{aligned} \quad (5.246)$$

que é função do tempo. Calculando o valor médio da energia total em uma oscilação, teremos

$$\langle E \rangle = \frac{C^2}{2} \left[m \omega^2 \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t - d) dt + k \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t - d) dt \right] \quad (5.247)$$

$$= \frac{C^2}{2} \left[m \omega^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{k}{2} \right] \quad (5.248)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{C^2}{4} [m \omega^2 + k] \\ &= \frac{m C^2}{4} (\omega^2 + k/m) \\ &= \frac{m C^2}{4} (\omega^2 + \omega_o^2) \end{aligned} \quad (5.249)$$

Da solução (5.248), vemos que o valor médio da energia cinética (T) é dado por

$$\langle T \rangle = \frac{1}{4} C^2 \omega^2 m \quad (5.250)$$

Substituindo o valor de C [equação (5.219)] na equação acima,

$$\langle T \rangle = \frac{1}{4} \frac{F_o w_o^2 m}{\left[m^2 (w_o^2 - w^2)^2 + (bw)^2 \right]} \quad (5.251)$$

O valor máximo de $\langle T \rangle$ será obtido calculando-se

$$\frac{d\langle T \rangle}{dw} = 0 \quad (5.252)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dw} \left[\frac{w^2}{m^2 (w_o^2 - w^2)^2 + (bw)^2} \right] &= \\ &= \frac{\left[m^2 (w_o^2 - w^2)^2 + (bw)^2 \right] \cdot 2w - w^2 \left[2m^2 (w_o^2 - w^2)(-2w) + 2b^2 w \right]}{\left[m^2 (w_o^2 - w^2)^2 + (bw)^2 \right]^2} \end{aligned} \quad (5.253)$$

assim,

$$2wm^2(w_o^2 - w^2)^2 + 2w(bw)^2 - 2b^2w^3 + 4m^2w^3(w_o^2 - w^2) = 0 \quad (5.254)$$

$$(w_o^2 - w^2)2m^2w[(w_o^2 - w^2) + 2w^2] = 0$$

$$2m^2w(w_o^2 - w^2)(w_o^2 + w^2) = 0 \quad (5.255)$$

cujas raízes serão

$$w_1 = 0 \quad (5.256)$$

$$w_2 = \pm w_o \quad (5.257)$$

$$w_3 = \pm iw_o \quad (5.258)$$

O valor máximo de $\langle T \rangle$ é obtido quando $w = w_o$, isto é, quando a frequência do sistema for igual a frequência do sistema sem amortecimento.

Da equação (5.248) vemos que o valor médio da energia potencial é dado por

$$\langle U \rangle = \frac{C^2 k}{4} \quad (5.259)$$

Como este valor é proporcional a C^2 , seu máximo será em $w = w_o$.

Substituindo o valor de C [equação (5.219)] em (5.249), teremos

$$\langle E \rangle = \frac{m}{4} (w^2 + w_o^2) \frac{F_o^2}{\left[m^2 (w_o^2 - w^2)^2 + (bw)^2 \right]} \quad (5.260)$$

que nos mostra que:

a) $\langle E \rangle$ tem máximo em $w = w_o$;

b) Para b pequeno, $\langle E \rangle \cong 0$, exceto para w próximo a w_o .

Mostramos na figura 5-20 curvas de $\langle E \rangle$ para diferentes valores de b (0,3 , 0,2 e 0,1), com $F_o = 1$, $w_o = 1$ e $m=1$.

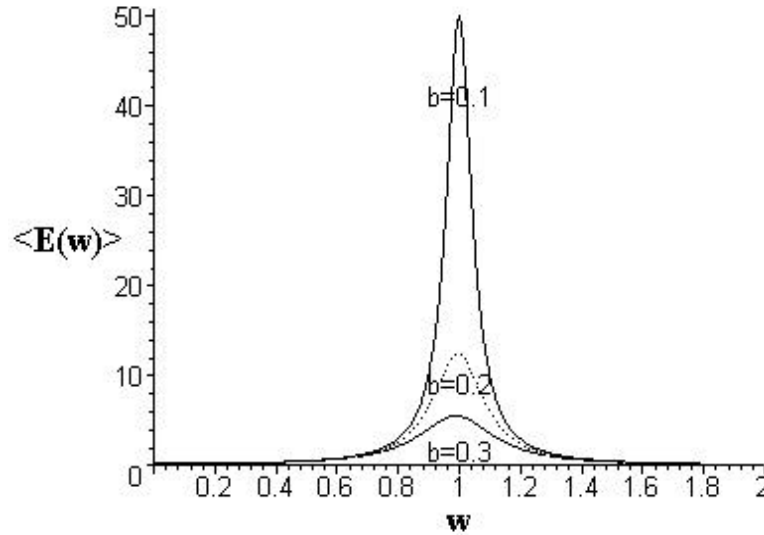


Figura 5-20

Considerando a aproximação (5.234) em (5.260), e que $w \cong w_o$

$$\langle E \rangle = \frac{m}{4} F_o^2 \left[\frac{2w_o^2}{m^2 4w_o^2 (w - w_o)^2 + b^2 w_o^2} \right] = \frac{F_o^2}{8m} \left[\frac{w_o^2}{(w - w_o)^2 + b^2/4m^2} \right] \quad (5.261)$$

$$= \frac{F_o^2}{8m} \left[\frac{w_o^2}{(w - w_o)^2 + a^2} \right] \quad (5.262)$$

que nos diz que a ressonância ocorrerá em $w = w_o$

Podemos utilizar o fator de qualidade Q para descrever o grau de amortecimento de um sistema. Observando a equação (5.144) vemos que o fator de qualidade para o oscilador harmônico amortecido fracamente ($b \cong 0$) será

$$Q = \frac{w_o}{2a}$$

onde w_o é a frequência de ressonância e $2a$ sua largura de ressonância [veja a equação (5.243)]. Para o oscilador harmônico amortecido forçado o fator de qualidade será também a razão entre a frequência de ressonância $w_R = w_o$ e sua largura de ressonância, que é igual a $2a$. Assim,

$$Q = w_R/2a \quad (5.263)$$

$$Q = w_o/2a \quad (5.264)$$

assim, de (5.243) e (5.264)

$$b/m = w_o/Q \quad (5.265)$$

Substituindo a equação (5.265) em (5.219)

$$\begin{aligned} C &= \frac{F_o/m}{\left[(w_o^2 - w^2)^2 + (bw/m)^2 \right]^{1/2}} \quad (5.266) \\ &= \frac{F_o/m}{\left[(w_o^2 - w^2)^2 + (ww_o/Q)^2 \right]^{1/2}} \\ &= \frac{F_o/m}{ww_o \left[\frac{(w_o^2 - w^2)^2}{(ww_o)^2} + \frac{1}{Q^2} \right]^{1/2}} \\ C &= \frac{F_o}{mw} \frac{w_o}{w_o} \frac{1}{\left[\left(\frac{w_o}{w} - \frac{w}{w_o} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right]^{1/2}} \\ C &= \frac{F_o}{k} \frac{w_o}{w} \frac{1}{\left[\left(\frac{w_o}{w} - \frac{w}{w_o} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right]^{1/2}} \quad (5.267) \end{aligned}$$

Substituindo (5.265) em (5.215) teremos

$$\tan h = \frac{(b/m)w}{(w_o^2 - w^2)} \quad (5.268)$$

$$= \frac{ww_o/Q}{w_o^2 - w^2}$$

$$= \frac{1/Q}{w_o/w - w/w_o} \quad (5.269)$$

Mostramos na figura 5-21 o gráficos da equação (5.269) para diferentes valores de Q (1, 3 e 7), com $w_o = 1$.

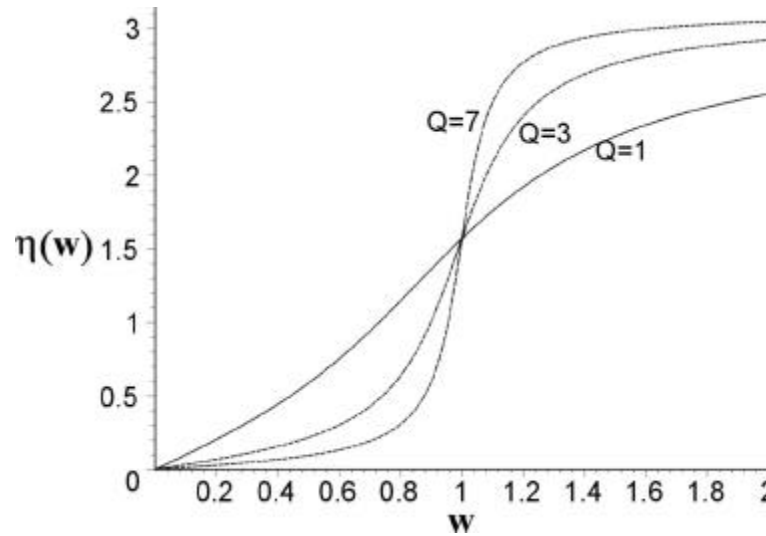


Figura 5-21

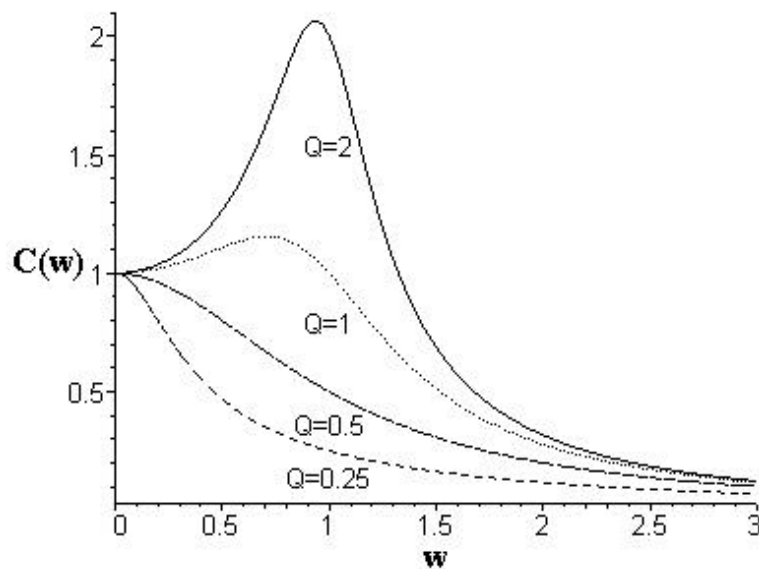


Figura 5-22

Na figura 5-22, temos o gráfico da equação (5.267), para diferentes valores de Q (0,25 , 0,5 , 1 e 2), com $F_0 / k = 1$ e $w_0 = 1$. Vemos que a amplitude tem um máximo para todos os valores de Q , exceto quando o sistema é muito amortecido. O máximo ocorre na frequência de ressonância [equação (5.225)]

$$w_R = \left[w_o^2 - b^2 / 2m^2 \right]^{1/2} \quad (5.270)$$

Substituindo (5.265) na equação (5.270)

$$\begin{aligned}
w_R &= \left[w_o^2 - \left(\frac{b}{m} \right)^2 \frac{1}{2} \right]^{1/2} \\
&= \left[w_o^2 - \left(\frac{w_o}{Q} \right)^2 \frac{1}{2} \right]^{1/2} \\
&= w_o \left[1 - \frac{1}{2Q^2} \right]^{1/2}
\end{aligned} \tag{5.271}$$

Observando que

$$w_o^2 - w_R^2 = b^2 / 2m^2 \tag{5.272}$$

O valor máximo da amplitude será dado por

$$\begin{aligned}
C(w_R) &= \frac{F_o / m}{\left[\left(\frac{b^2}{2m^2} \right)^2 + \left(\frac{b}{m} \right)^2 \cdot \left(w_o^2 - \frac{b^2}{2m^2} \right) \right]^{1/2}} \\
&= \frac{F_o / m}{\left[\left(\frac{b^2}{2m^2} \right)^2 + \frac{b^2}{m^2} w_o^2 - \frac{b^4}{2m^4} \right]^{1/2}} \\
&= \frac{F_o / m}{\left[\frac{b^2}{m^2} w_o^2 - \frac{b^4}{4m^4} \right]^{1/2}} \\
&= \frac{F_o / m}{\frac{b}{m} \left[w_o^2 - \frac{b^2}{4m^2} \right]^{1/2}} \\
&= \frac{F_o}{b \left[w_o^2 - \frac{w_o^2}{4Q^2} \right]^{1/2}} \\
C(w_R) &= \frac{F_o}{bw_o \left[1 - 1/(4Q^2) \right]^{1/2}}
\end{aligned} \tag{5.274}$$

Para o oscilador harmônico forçado, é interessante sabermos com que taxa de energia o sistema deve ser suprido para que este oscile com uma amplitude fixa. A potência instantânea é dada por

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{dW}{dt} \\
 &= F \frac{dx}{dt}
 \end{aligned} \tag{5.275}$$

Multiplicando a equação diferencial (5.156) por dx/dt , teremos

$$m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + kx \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} F_o \cos wt \tag{5.276}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right] + b \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{dx}{dt} f(t) \tag{5.277}$$

O primeiro termo do lado esquerdo é a taxa de mudança da energia total do sistema (soma da energia cinética e potencial), e o segundo, a taxa com que a energia está sendo dissipada pelo amortecimento. O lado direito é a taxa com que a energia está sendo suprida pela força externa. Assim,

$$P = \dot{x} F_o \cos wt \tag{5.278}$$

Substituindo (5.206) na equação acima,

$$\begin{aligned}
 P &= -Cw \sin(wt - h) F_o \cos(wt) \\
 &= -CF_o w [\sin wt \cosh - \sin h \cos wt] \cdot \cos(wt) \\
 &= -CF_o w [\sin wt \cos wt \cosh - \cos^2 wt \sin h] \\
 P &= CF_o w [\cos^2 wt \sin h - \cos wt \sin wt \cosh]
 \end{aligned} \tag{5.279}$$

tomando o valor médio da equação (5.279)

$$\langle P \rangle = CF_o w [\sin h \langle \cos^2 wt \rangle - \langle \cos wt \sin wt \rangle \cosh] \tag{5.280}$$

e sabendo que

$$\langle \cos^2 wt \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 wt dt = \frac{1}{2} \tag{5.281}$$

$$\langle \sin wt \cos wt \rangle = 0 \tag{5.282}$$

teremos

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} CF_o w \sin h \tag{5.283}$$

Precisamos escrever $\sin h$ dado pela equação (5.216) em função do fator de qualidade Q

$$\sinh = \frac{b/w}{\left[m^2 (w_0^2 - w^2)^2 + (bw)^2 \right]^{1/2}} \quad (5.216)$$

$$\sinh = \frac{b/w}{mw \left[\frac{(w_0^2 - w^2)^2}{w^2} + \left(\frac{b}{m} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

Lembrando que

$$\frac{b}{m} = w_o / Q \quad (5.265)$$

$$\sinh = \frac{w_0 / Q}{\left[\frac{(w_0^2 - w^2)^2}{w^2} + \left(\frac{w_0}{Q} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (5.284)$$

$$\sinh = \frac{w_0}{Qw_0 \left[\frac{(w_0^2 - w^2)^2}{w^2 w_0^2} + \left(\frac{1}{Q} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

$$\sinh = \frac{1}{Q \left[\left(\frac{w_0^2}{ww_0} - \frac{w^2}{ww_0} \right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

$$\sinh = \frac{1}{Q \left[\left(\frac{w_0}{w} - \frac{w}{w_0} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \right]^{1/2}} \quad (5.285)$$

Substituindo as equações (5.267) e (5.285) em (5.283) teremos

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} F_o w \frac{F_o}{k} \frac{w_o}{w} \frac{1}{\left[(w_o/w - w/w_o)^2 + 1/Q^2 \right]^{1/2}} \frac{1}{Q \left[(w_o/w - w/w_o)^2 + 1/Q^2 \right]^{1/2}} \quad (5.286)$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} F_o^2 \frac{w_o}{kQ} \frac{1}{\left[(w_o/w - w/w_o)^2 + 1/Q^2 \right]} \quad (5.287)$$

Em $w = w_o$, temos um máximo dado por

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{1}{2} F_o^2 \frac{w_o}{kQ} \cdot Q^2 \quad (5.288)$$

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{F_0^2 w_0 Q}{2k} \quad (5.289)$$

Como $k = m\omega_0^2$

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{F_0^2 w_0 Q}{2m\omega_0^2} \quad (5.290)$$

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{F_0^2 Q}{2m\omega_0} \quad (5.291)$$

Mostramos na figura 5-23, o gráfico da equação (5.284) para diferentes valores de Q (1, 3 e 7), com $F_0^2/k = 1$ e $w_0 = 1$.

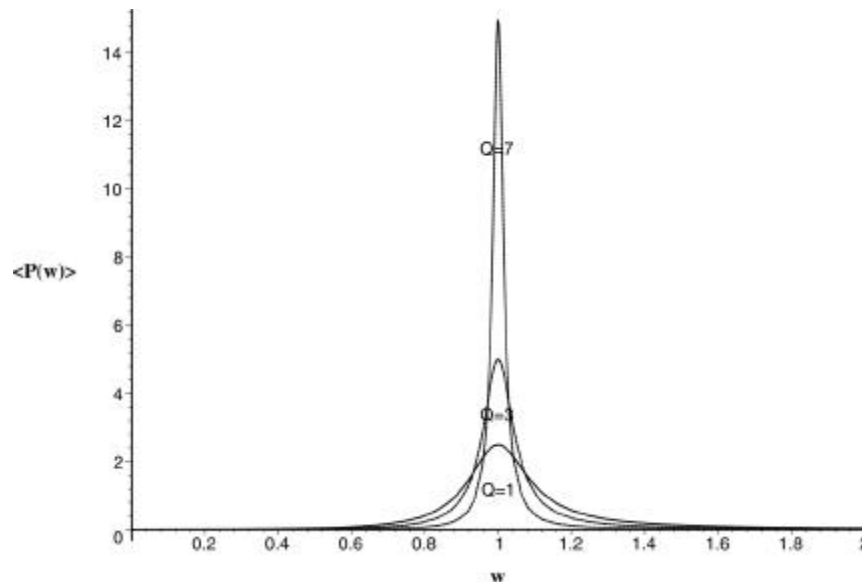


Figura 5-23

5-6 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO DO OSCILADOR HARMÔNICO FORÇADO PELO MÉTODO DE FOURIER

Quando a força externa aplicada $f(t)$ é uma função periódica não senoidal, podemos utilizar o Método de Fourier, uma vez que a equação de movimento é linear, de modo que o Princípio de Superposição pode ser usado. O método consiste em expandir $f(t)$ em série, da forma

$$f(t) = \sum_n f_n(t) \quad (5.286)$$

tal que as equações diferenciais

$$m\ddot{x}_n + b\dot{x}_n + kx_n = f_n(t) \quad (5.288)$$

sejam individualmente satisfeitas pelas funções $x_n(t)$. Assim, a solução da equação diferencial

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t) \quad (5.289)$$

é dada por

$$x(t) = \sum_n x_n(t) \quad (5.290)$$

Considerando que $f(t)$ é periódica no intervalo $(-L, L)$ e tem período $T = 2L$

$$f(t + T) = f(t) \quad (5.291)$$

a expansão de $f(t)$ em Série de Fourier é dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t] \quad (5.292)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t') \cos \frac{n\pi t'}{L} dt' \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.293)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t') \sin \frac{n\pi t'}{L} dt' \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.294)$$

5-7 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO DO OSCILADOR HARMÔNICO FORÇADO PELO MÉTODO DE GREEN

Quando a força externa aplicada é função do tempo $f(t)$, podemos aplicar o método de Green para resolver a equação diferencial. A idéia do método é simples, e consiste em decompormos a força $f(t)$ em uma série de pulsos atuando em um intervalo de tempo muito pequeno, conforme mostra a figura 5-24

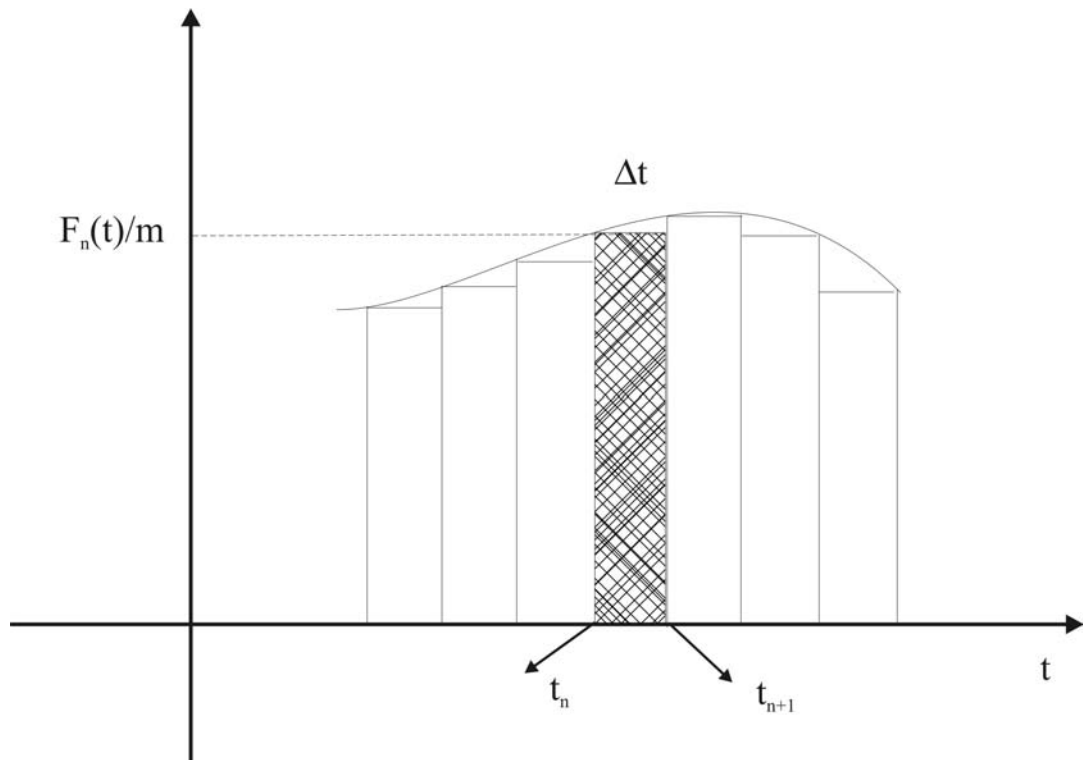


Figura 5-24

Considerando que o sistema seja linear, podemos utilizar o Princípio de Superposição, de modo a expressar a parte não homogênea da equação diferencial como a soma das forças impulsivas $F_n(t)/m$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{F_n}{m}(t) \quad (5.295)$$

Devemos observar que $F_n(t) = 0$, exceto durante a transmissão instantânea do impulso ao oscilador no instante de tempo τ

Para $t > \tau$, considerando que o amortecimento seja pequeno, a solução da equação homogênea é dada por

$$x_n(t) = e^{-\alpha t} [A \cos \omega t + B \sin \omega t] \quad (5.296)$$

em que

$$\alpha = b/2m$$

$$\omega = \frac{1}{2m} [4mk - b^2]^{1/2}$$

$$= [\omega_o^2 - \alpha^2]^{1/2} \quad (5.297)$$

Aplicando agora as condições iniciais, isto é, como resultado do impulso em $t = t$, a posição $x(t)$ ainda é zero, mas a velocidade $\dot{x}(t)$ será dada por

$$\dot{x}(t) = I/m \quad (5.298)$$

em que

$$I = \int f(t) dt \quad (5.299)$$

Podemos determinar as constantes A e B da equação (5.296). Vejamos como determiná-las:

$$x(t) = 0 \quad (5.300)$$

$$e^{-at} [A \cos wt + B \sin wt] = 0$$

como e^{-at} é sempre diferente de zero,

$$A \cos wt + B \sin wt = 0 \quad (5.301)$$

$$A = -B \frac{\sin wt}{\cos wt} \quad (5.302)$$

$$\frac{dx}{dt} = -a e^{-at} [A \cos wt + B \sin wt] + e^{-at} [-wA \sin wt + wB \cos wt] \quad (5.303)$$

Em $t = t$

$$\dot{x}(t) = I/m$$

$$e^{-at} [-aA \cos wt - aB \sin wt - wA \sin wt + wB \cos wt] = I/m$$

$$A[-a \cos wt - w \sin wt] + B[-a \sin wt + w \cos wt] = \frac{I}{m} e^{at} \quad (5.304)$$

Substituindo o valor de A [equação (5.302)] na equação acima,

$$-B \frac{\sin wt}{\cos wt} [-a \cos wt - w \sin wt] + B[-a \sin wt + w \cos wt] = e^{at} I/m$$

$$B \left[a \sin wt + w \frac{\sin^2 wt}{\cos wt} - a \sin wt + w \cos wt \right] = e^{at} I/m$$

$$B = \frac{I}{mw} e^{at} \frac{1}{\left(\frac{\sin^2 wt}{\cos wt} + \cos wt \right)}$$

$$B = \frac{I}{mw} e^{at} \cos wt \quad (5.305)$$

Substituindo (5.305) em (5.302), teremos o valor de A

$$A = -\frac{I}{mw} e^{at} \cos wt \frac{\sin wt}{\cos wt}$$

$$A = -\frac{I}{mw} e^{at} \operatorname{sen} wt \quad (5.306)$$

Substituindo os valores de A e B na equação (5.296), teremos que

$$x_n(t) = e^{-at} \left\{ \frac{I}{mw} e^{at} [-\operatorname{sen} wt \cos wt + \cos wt \operatorname{sen} wt] \right\}$$

$$x_n(t) = \frac{I}{mw} e^{-a(t-t)} \operatorname{sen} w(t-t) \quad (5.307)$$

Somando sobre todos os pulsos e fazendo a largura do pulso tender a zero, teremos

$$\begin{aligned} x(t) &\cong \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow -\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{mw} e^{-a(t-t)} \operatorname{sen} w(t-t) f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,t) f(t) dt \end{aligned} \quad (5.308)$$

em que

$$G(t,t) = \frac{1}{mw} e^{-a(t-t)} \operatorname{sen} w(t-t) \quad (5.309)$$

é a função de Green do problema considerado. Conhecido $f(t)$, resolvendo a integral (5.309) teremos a solução do problema.

MOVIMENTO SOB A AÇÃO DE UMA FORÇA CENTRAL

6-1 INTRODUÇÃO

Denominamos de Força Central a força de interação entre duas partículas, cuja linha de ação é dirigida ao longo da reta que une estas partículas, e que a magnitude da força depende apenas da distância entre elas. Matematicamente, as forças centrais são escritas da forma:

$$\vec{F} = F(\vec{r})\hat{r} \quad (6.1)$$

Caso $F(\vec{r}) < 0$ ($F(\vec{r}) > 0$) dizemos que a força é atrativa (repulsiva).

Forças centrais são tão importantes na Física, que merecem um estudo mais detalhado. Como exemplos, temos o movimento dos corpos celestes, o espalhamento de partículas α por átomos e o modelo atômico para o átomo de hidrogênio, proposto no início do desenvolvimento da Mecânica Quântica.

Na forma mais simples, tratamos do problema de duas partículas que interagem entre si, considerando que uma delas tenha a massa muito maior que a outra, de modo que a de massa maior possa ser considerada em repouso e que a outra esteja sob a influência da primeira. Considerando que o sistema seja conservativo, podemos resolvê-lo sem a restrição descrita acima, utilizando o sistema de coordenadas do centro de massa.

O objetivo deste capítulo consiste em estudarmos o movimento de corpos celestes e o espalhamento de partículas α por átomos (Espalhamento de Rutherford).

6-2 O PROBLEMA DE DOIS CORPOS

Nesta seção, utilizaremos a formulação do capítulo 2 (Formulação Newtoniana da Mecânica) seção 8 (Sistema de Muitas Partículas), para resolvermos o problema de duas partículas com massas m_1 e m_2 , cuja força de interação seja newtoniana

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

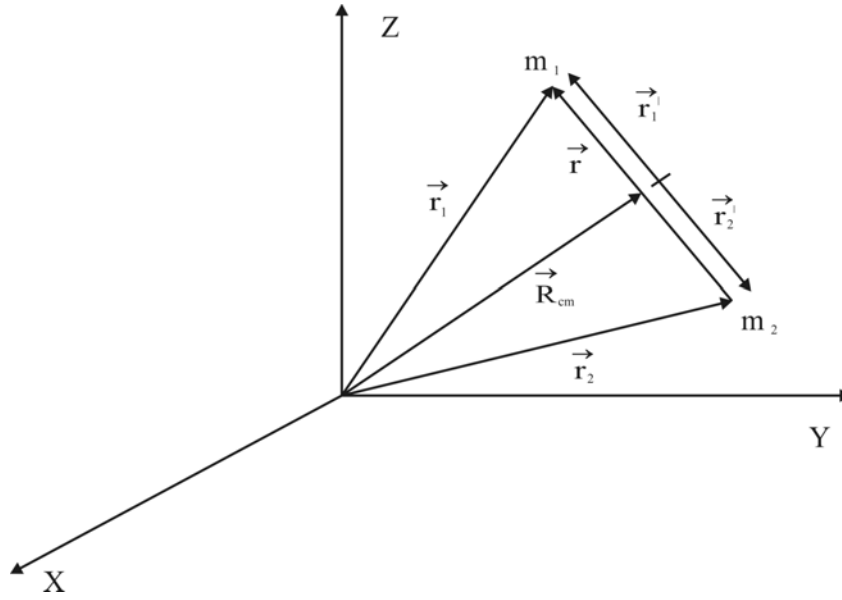


Figura 6-1

Da Figura 6-1, vemos que

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (6.2)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1' - \vec{r}_2' \quad (6.3)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{cm} + \vec{r}_1' \quad (6.4)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_{cm} + \vec{r}_2' \quad (6.5)$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (6.6)$$

$$m_1 \vec{r}_1' + m_2 \vec{r}_2' = 0 \quad (6.7)$$

Observe que as equações (6.6) e (6.7) decorrem da definição de centro de massa, conforme seção 2-8 [equações (2.68) e (2.73)]. Da equação (6.7),

$$\vec{r}_2' = -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1' \quad (6.8)$$

Substituindo (6.8) em (6.3),

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_1' - \left(-\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1' \right) \\ \vec{r} &= \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) \vec{r}_1' \end{aligned} \quad (6.9)$$

Resolvendo (6.9) para $\vec{r}_1'$,

$$\vec{r}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (6.10)$$

Substituindo (6.10) em (6.8),

$$\begin{aligned} \vec{r}_2' &= -\frac{m_1}{m_2} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \vec{r} \\ \vec{r}_2' &= \frac{-m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Substituindo (6.10) em (6.4)

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{cm} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (6.12)$$

Derivando a equação acima em relação ao tempo,

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_{cm} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{V} \quad (6.13)$$

Substituindo (6.11) em (6.5),

$$\vec{r}_2 = \vec{R}_{cm} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (6.14)$$

e derivando a equação acima em relação ao tempo,

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_{cm} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V} \quad (6.15)$$

Considerando que a energia potencial de interação seja do tipo $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = V(\vec{r})$, a energia total do sistema será

$$E = \frac{1}{2} m_1 \vec{V}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{V}_2^2 + V(\vec{r}) \quad (6.16)$$

Substituindo (6.13) e (6.15) em (6.16),

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m_1 \left[\vec{V}_{cm}^2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{V}_{cm} \cdot \vec{V} + \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \vec{V}^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} m_2 \left[\vec{V}_{cm}^2 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{V}_{cm} \cdot \vec{V} + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \vec{V}^2 \right] + V(\vec{r}) \\ E &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \left[\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \right] + V(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \vec{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \vec{V}^2 \left[\frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2} \right] + V(\vec{r}) \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}\vec{V}^2 + V(\vec{r}) \quad (6.18)$$

$$= \frac{1}{2}M\vec{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu\vec{V}^2 + V(\vec{r}) \quad (6.19)$$

em que

$$M = m_1 + m_2 \quad (6.20)$$

é a massa total e

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (6.21)$$

é a massa reduzida do sistema.

Observando a equação (6.19), podemos interpretá-la da seguinte forma: tomando um referencial no CM do sistema, a energia total se reduzirá a

$$E = \frac{1}{2}\mu\vec{V}^2 + V(\vec{r}) \quad (6.22)$$

isto é, nós, formalmente, reduzimos o problema de dois corpos sob a ação de uma força central ao problema de um único corpo com massa igual à massa reduzida do sistema movendo-se em torno do CM do sistema. A Figura 6-2 ilustra essa explicação.

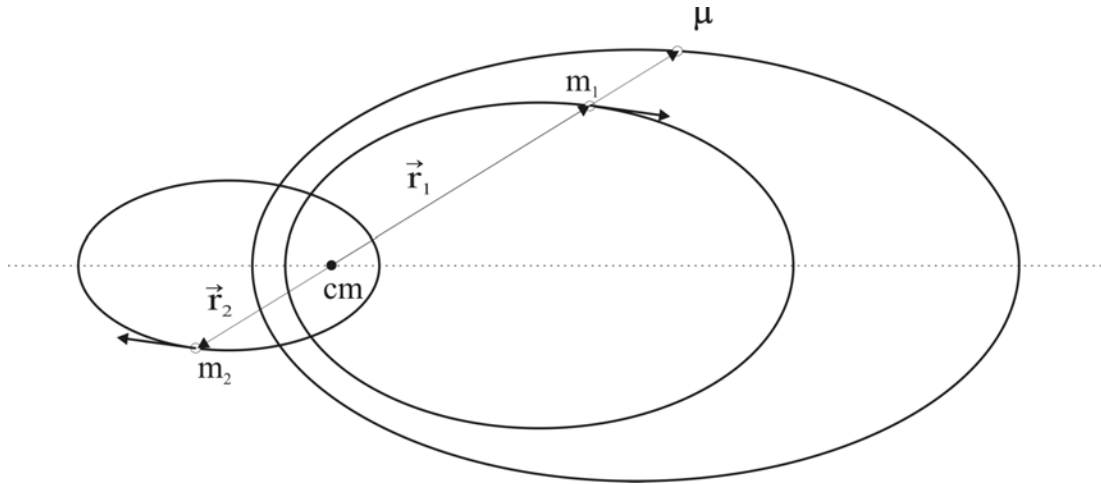


Figura 6-2

Resolvendo a equação (6.22) para $\vec{r} = \vec{r}(t)$ e conhecendo m_1 e m_2 , podemos obter os vetores r_1 e r_2 através das equações (6.12) e (6.14), respectivamente.

6-3 PROPRIEDADES DOS MOVIMENTOS SOB A AÇÃO DE FORÇAS CENTRAIS

O movimento sob a ação de uma força central tem duas propriedades gerais. A primeira é que o momento angular total do sistema é conservado. Isso pode ser visto usando a definição de torque.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (6.23)$$

Para uma força central, $\vec{F}$ é dado pela equação (6.1). Assim,

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r})\hat{r} \\ &= F(\vec{r})\vec{r} \times \hat{r} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

Como

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (6.25)$$

$\vec{L}$ será constante.

A segunda propriedade é que o movimento será plano e o momento angular é perpendicular ao plano da órbita. Sabemos que

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \quad (6.26)$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu\vec{V} \quad (6.27)$$

$$\vec{L} = \mu\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (6.28)$$

Mostramos na figura 6-3 esses vetores

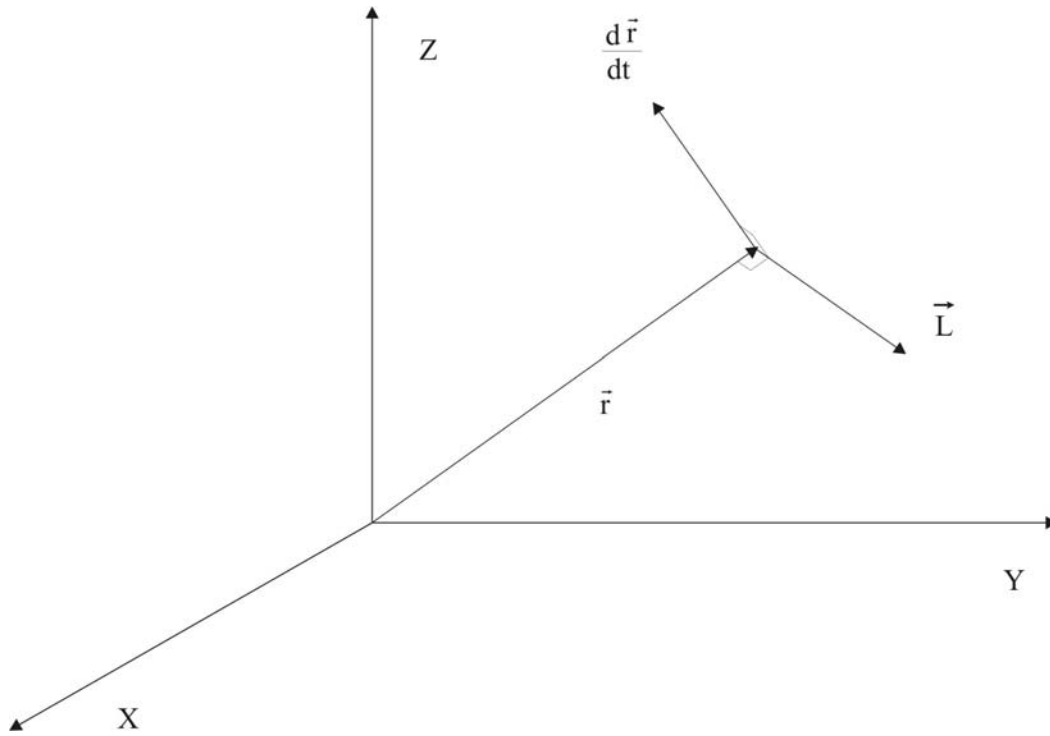


Figura 6-3

Dessa figura, vemos que o movimento será plano com $\vec{L}$ perpendicular ao plano formado por $\vec{r}$ e $d\vec{r}/dt$.

Para um movimento plano, podemos escrever as equações de movimento em coordenadas polares (r, θ) , da forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = \mu a_r \hat{e}_r + \mu a_\theta \hat{e}_\theta \quad (6.29)$$

Onde

$$a_r = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \quad (6.30)$$

$$a_\theta = [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}] \quad (6.31)$$

[equações (1.119) e (1.120)]. Se a força é central

$$F(\vec{r})\hat{e}_r = \mu a_r \hat{e}_r + \mu a_\theta \hat{e}_\theta$$

e as equações de movimento para as componentes r e θ serão dadas por

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \quad (6.32)$$

$$\mu(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \quad (6.33)$$

Multiplicando a equação anterior por r ,

$$\mu r^2 \ddot{\theta} + \mu 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (6.34)$$

que pode ser escrita da forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\theta}) &= 0 \\ \frac{dL}{dt} &= 0\end{aligned}\tag{6.35}$$

com

$$L = \mu r^2 \dot{\theta}\tag{6.36}$$

$$= \text{constante}\tag{6.37}$$

cujo valor depende das condições iniciais do problema.

Se a força é conservativa, podemos utilizar a conservação da energia para resolver o problema,

$$E = T + V\tag{6.38}$$

$$= \frac{1}{2} \mu v^2 + V\tag{6.39}$$

em que $\vec{v}$ é dado pela equação (1.114).

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta\tag{6.40}$$

Assim,

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2\tag{6.41}$$

Substituindo (6.41) na equação (6.39),

$$E = \frac{1}{2} \mu \left[\dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2 \right] + V\tag{6.42}$$

$$= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\theta}^2 + V\tag{6.43}$$

e utilizando a equação (6.36), podemos escrever a equação acima da forma

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V\tag{6.44}$$

6-4 POTENCIAL EFETIVO E CLASSIFICAÇÃO DAS ÓRBITAS

Observando a equação de conservação da energia [equação (6.44)], vemos que esta pode ser interpretada como a equação de movimento de uma partícula de massa μ sob a influência de um potencial efetivo V_{ef} dado por

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad (6.45)$$

Assim, a equação (6.44) ficará

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{ef} \quad (6.46)$$

O potencial efetivo descreve o movimento de uma partícula de massa μ sob a ação de uma força central quando visto por um observador no centro de massa do sistema que rotaciona de forma a apontar sempre na direção da partícula. Como o referencial é acelerado, o potencial V é modificado de forma que a partícula de massa μ "sente" um potencial efetivo dado pela equação (6.45), cuja "força efetiva" será dada por

$$\vec{F}_{ef} = -\vec{\nabla}V_{ef} \quad (6.47)$$

$$= -\vec{\nabla}V + \frac{L^2}{\mu r^3}\hat{e}_r \quad (6.48)$$

Da equação anterior, vemos que o segundo termo do segundo membro da equação é exatamente a força centrífuga

$$\vec{F}_c = \frac{L^2}{\mu r^3}\hat{e}_r \quad (6.49)$$

$$= \frac{\mu^2 r^4 \dot{\theta}^2}{\mu r^3}\hat{e}_r$$

$$= \mu r \dot{\theta}^2 \hat{e}_r \quad (6.50)$$

que é uma força não inercial que "aparece" devido ao fato de estarmos usando um referencial não inercial. Um outro aspecto relevante é que com a introdução do potencial efetivo, podemos tratar o problema como unidimensional de modo que podemos resolvê-lo pelo método do potencial, descrito no capítulo 3, seção 5. Essa abordagem é conhecida como método do potencial efetivo.

Da equação (6.44), temos que

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad (6.44)$$

Resolvendo a equação acima para a velocidade,

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right) \quad (6.51)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left[E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]} \quad (6.52)$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V_{ef}]} \quad (6.53)$$

A velocidade deve ser maior ou igual a zero

$$\dot{r} \geq 0 \quad (6.54)$$

fazendo com que o sistema obedeça à seguinte inequação

$$V_{ef} \leq E$$

$$V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} \leq E \quad (6.55)$$

Os valores máximos e mínimos de r , onde $\dot{r} = 0$, são obtidos com a igualdade da inequação (6.55), fornecendo os pontos de retorno ou as distâncias apsidaís da órbita.

Para ilustrarmos esse método de resolução, utilizaremos como exemplo uma força atrativa do tipo

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \hat{r} \quad K > 0 \quad (6.56)$$

Como

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

teremos que

$$V = -\frac{K}{r} \quad (6.57)$$

de modo que o potencial efetivo será

$$V_{ef} = V + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

$$V_{ef} = -\frac{K}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} \quad (6.58)$$

Mostramos na figura 6-4 o gráfico da equação (6.58) e de cada um dos termos separadamente. Usou-se $K=1$.

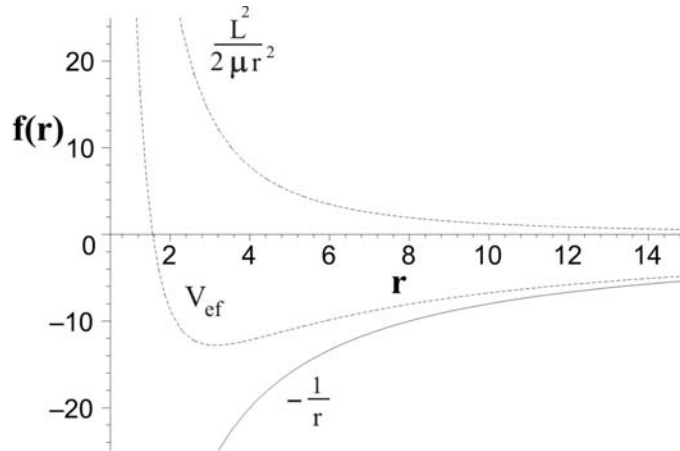


Figura 6-4

Observa-se da figura 6-4 que:

1. Para valores de r grande, o termo $-\frac{1}{r}$ é dominante, de modo que

$$V_{ef} < 0$$

2. Para valores de r pequeno, o termo $L^2/2\mu r^2$ é dominante, de modo que

$$V_{ef} > 0$$

3. Quando $r \rightarrow \infty, V_{ef} \rightarrow 0$

4. Quando $r \rightarrow 0, V_{ef} \rightarrow \infty$

A análise do movimento é obtida especificando-se um valor de energia constante E para o sistema. Dependendo do valor da energia do sistema, conforme mostra a figura 6-5,

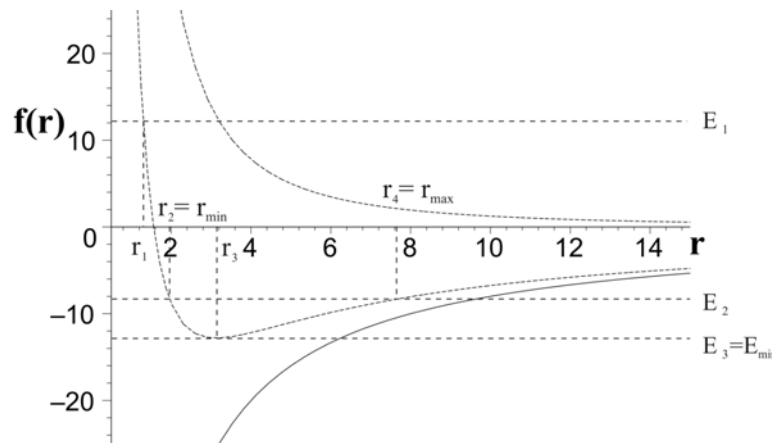


Figura 6.5

podemos obter os seguintes movimentos possíveis:

- A) para $E = E_3 = E_{\min}$, o raio da partícula assume um único valor $r = r_3$, e $\dot{r} = 0$ para qualquer tempo t , de modo que o movimento será circular;
- B) para $E_{\min} < E < 0$, existem dois pontos de retorno onde $\dot{r} = 0$. Esses pontos são de mínima aproximação ($r_{\min} = r_2$) e máximo afastamento ($r_{\max} = r_4$). Como $\dot{\theta} \neq 0$, a partícula não está em repouso e o momento angular L será dado por

$$L = \mu r^2 \dot{\theta}$$

$$L = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (6.59)$$

Assim,

$$d\theta = \frac{L}{\mu r^2} dt \quad (6.60)$$

Da equação (6.52), temos que

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left[E - V - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]}} \quad (6.61)$$

$$d\theta = \frac{L dr}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} \left[E - V - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]}}$$

$$d\theta = \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V) - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (6.62)$$

Durante o tempo em que r varia de $r_{\max}$ a $r_{\min}$ e volta, a variação angular será dada por

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2\mu[E - V] - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (6.63)$$

A curva será fechada quando $\Delta\theta$ é uma fração de 2π , isto é,

$$\Delta\theta = 2\pi \frac{P}{Q} \quad (6.64)$$

onde P e Q são números inteiros. Nesse caso, após Q períodos, o raio vetor da partícula teria feito P revoluções completas e a trajetória será fechada. Caso contrário, a curva será aberta (roseta). Em ambos os casos o movimento será confinado;

- C) para $E < E_{\min}$, o movimento não é permitido de acordo com a inequação (6.54.);

- D) para $E > 0$, o movimento não será confinado. Uma partícula vinda do infinito atinge um ponto de aproximação máxima ($r = r_1$) e retorna para o infinito, descrevendo uma hipérbole;
- E) para $E = 0$, o movimento não será confinado. Uma partícula vinda do infinito atinge um ponto de aproximação máxima, entre r_1 e r_2 onde $f(r) = 0$, e retorna para o infinito, descrevendo uma parábola.

6-5 SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DO MOVIMENTO SOB A AÇÃO DE UMA FORÇA CENTRAL

Vimos anteriormente [equação (6.52)] que

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left[E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \right]} = \frac{dr}{dt} \quad (6.52)$$

Resolvendo para dt , e integrando,

$$\int dt = \int \frac{dr}{\left[\frac{2}{\mu} (E - V) - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} \right]^{1/2}} \quad (6.65)$$

$$t = \int \frac{dr}{\left[\frac{2}{\mu} (E - V) - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} \right]^{1/2}} + \text{constante} \quad (6.66)$$

Resolvendo a integral acima, podemos obter $t = t(r)$. Fazendo a inversão, determinamos $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Caso o interesse seja em obter a equação da trajetória (r, θ) , podemos usar a equação (6.62) e obtermos θ

$$\theta = \int \frac{L dr}{r^2 \left[2\mu(E - V) - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2}} + \text{constante} \quad (6.67)$$

Faremos uma mudança de variável do tipo

$$r = \frac{1}{u} \quad (6.68)$$

para colocar (6.67) na forma padrão. Derivando (6.68)

$$dr = -\frac{1}{u^2} du \quad (6.69)$$

Substituindo (6.68) e (6.69) em (6.67), teremos

$$\theta = \frac{-L}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{du}{\left[E - V - \left(\frac{L^2}{2\mu} \right) u^2 \right]^{1/2}} + \text{constante} \quad (6.70)$$

Conhecido o potencial, podemos obter a solução da trajetória.

Para o caso de termos uma força do tipo

$$F(r) = \alpha r^n \quad (6.71)$$

podemos obter o potencial V

$$\begin{aligned} V(r) &= -\int_0^r F(\tilde{r}) d\tilde{r} \\ &= -\alpha \int_0^r r^n dr \\ &= -\alpha \frac{r^{n+1}}{n+1} \end{aligned} \quad (6.72)$$

para $n \neq -1$. Fazendo a mudança de variável (6.68) a equação (6.72) ficará

$$V(u) = -\alpha \frac{u^{-(n+1)}}{n+1} \quad (6.73)$$

Substituindo o potencial dado pela equação anterior na equação (6.70),

$$\theta = \frac{-L}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{du}{\left[E + \alpha \frac{u^{-n-1}}{n+1} - \left(\frac{L^2}{2\mu} \right) u^2 \right]^{1/2}} + \text{constante} \quad (6.74)$$

A solução da integral acima depende do valor de n . Para $n = 1, -2$ e -3 , a solução será dada em termos das funções trigonométricas. Quando $n = 5, 3, 0, -4, -5$ e -7 , a solução será dada em termos de funções elípticas.

Uma outra forma de obtermos a equação da órbita é utilizando a equação de movimento [equação (6.32)],

$$\mu \ddot{r} - \mu r \dot{\theta}^2 = F(r) \quad (6.32)$$

Fazendo a mudança de variável (6.68);

$$r = \frac{1}{u} \quad (6.68)$$

calculando suas derivadas primeira e segunda;

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= -\frac{1}{u^2} \dot{\theta} \frac{du}{d\theta} \\
&= -\frac{1}{\mu} (\mu r^2 \dot{\theta}) \frac{du}{d\theta} \\
&= -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta}
\end{aligned} \tag{6.76}$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{L}{\mu} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} \tag{6.77}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{L}{\mu} \left(\frac{L}{\mu r^2} \right) \frac{d^2 u}{d\theta^2} \\
&= -\frac{L^2}{\mu^2 r^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \\
&= -\frac{L^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}
\end{aligned} \tag{6.78}$$

podemos escrever (6.32) da forma

$$\mu \ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{\mu r^3} \tag{6.79}$$

$$\mu \left[-\frac{L^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right] = F(1/u) + \frac{L^2}{\mu^2} u^3 \tag{6.80}$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u - \frac{\mu}{L^2 u^2} F(1/u) \tag{6.81}$$

que é a equação diferencial da órbita. Conhecido a força, podemos obter a equação da órbita ou vice-versa.

Quando o momento angular é nulo, essa equação não serve. Veremos como tratar desse caso. Sabemos que

$$\begin{aligned}
L &= \mu r^2 \dot{\theta} \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{L}{\mu r^2} \\
d\theta &= \frac{L}{\mu r^2} dt
\end{aligned} \tag{6.82}$$

integrando, teremos

$$\theta = \theta_0 + \int \frac{L}{\mu r^2} dt \tag{6.83}$$

Quando $L = 0$, $\theta = \theta_0$ e a trajetória será uma reta que passa pela origem.

Não sabendo resolver as integrais ou a equação diferencial, mesmo assim podemos obter o comportamento da partícula sob a ação de um potencial efetivo V_{ef} fazendo a análise de sua energia.

6-6 FORÇA CENTRAL INVERSAMENTE PROPORCIONAL AO QUADRADO DA DISTÂNCIA

Nesta seção mostraremos como obter a equação da órbita. Utilizando tanto o método de integração, equação (6.70), quanto através da equação diferencial, equação (6.81), para o caso de uma força central atrativa inversamente proporcional ao quadrado da distância

$$\vec{F}(r) = -\frac{k}{r^2} \hat{e}_r \quad (6.84)$$

Para uma força desse tipo, o potencial será

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\vec{\nabla} V \\ V &= -\frac{K}{r} \end{aligned} \quad (6.85)$$

Fazendo uma mudança de variável do tipo

$$r = \frac{1}{u} \quad (6.86)$$

as equações (6.84) e (6.85) ficarão

$$F(1/u) = -K u^2 \quad (6.87)$$

$$V(1/u) = -Ku \quad (6.88)$$

A) Método de Integração

Da equação (6.70) temos que

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 - \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int \frac{du}{\left[E - V - \left(\frac{L^2}{2\mu} \right) u^2 \right]^{1/2}} \\ \theta &= \theta_0 - \int \frac{du}{\left[\frac{2\mu E}{L^2} - \frac{2\mu V}{L^2} - u^2 \right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (6.89)$$

Substituindo o valor de V [equação (6.88)] na equação acima, teremos

$$\theta = \theta_0 - \int \frac{du}{\left[\frac{2\mu E}{L^2} + \frac{2\mu Ku}{L^2} - u^2 \right]^{1/2}} \quad (6.90)$$

Sabendo que

$$\int \frac{dx}{[a + bx + cx^2]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos \left(\frac{b + 2cx}{\sqrt{Q}} \right) \quad (6.91)$$

em que

$$Q = b^2 - 4ac \quad (6.92)$$

e fazendo uma comparação de (6.90) com (6.91), teremos que

$$\frac{2\mu E}{L^2} = a \quad (6.93)$$

$$\frac{2\mu K}{L^2} = b \quad (6.94)$$

$$-1 = c \quad (6.95)$$

assim,

$$Q = \left(\frac{2\mu K}{L^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{2\mu E}{L^2} \right) \quad (6.96)$$

$$\sqrt{Q} = \left(\frac{2\mu K}{L^2} \right) \left[1 + \left(\frac{2EL^2}{\mu K^2} \right) \right]^{1/2} \quad (6.97)$$

$$b + 2cx = \frac{2\mu K}{L^2} - 2u \quad (6.98)$$

$$= 2 \left[\frac{\mu K}{L^2} - u \right] \quad (6.99)$$

Utilizando esses resultados, teremos que

$$\theta - \theta_0 = -\arccos \left\{ \frac{2 \left[\frac{\mu K}{L^2} - u \right]}{\frac{2\mu K}{L^2} \left(1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2} \right)^{1/2}} \right\} \quad (6.100)$$

Como o cosseno é uma função par,

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta)$$

de modo que (6.100) nos fornece

$$\cos(\theta - \theta_0) = \frac{\frac{\mu K}{L^2} - u}{\frac{\mu K}{L^2} \left(1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2}\right)^{1/2}} \quad (6.101)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu K}{L^2} - u &= -\frac{\mu K}{L^2} \left(1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2}\right)^{1/2} \cos(\theta - \theta_0) \\ u &= \frac{\mu K}{L^2} \left[1 + \left(1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2}\right)^{1/2} \cos(\theta - \theta_0)\right] \end{aligned} \quad (6.102)$$

Fazendo

$$\alpha = \frac{L^2}{\mu K} \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2}\right)^{1/2} \quad (6.103)$$

e lembrando que

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} &= \frac{1}{\alpha} [1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)] \end{aligned} \quad (6.104)$$

Resolvendo para r , teremos

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)} \quad (6.105)$$

que é a equação da órbita.

B) Utilizando a equação diferencial

Da equação (6.81) temos que

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u - \frac{\mu}{L^2 u^2} F(1/u) \quad (6.81)$$

Substituindo (6.87) na equação acima teremos

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u - \frac{\mu}{L^2 u^2} (-Ku^2) \quad (6.106)$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu K}{L^2} \quad (6.107)$$

Essa equação é facilmente resolvida se observarmos que podemos escrevê-la da forma

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(u - \frac{\mu K}{L^2}\right) + \left(u - \frac{\mu K}{L^2}\right) = 0 \quad (6.108)$$

e fizemos uma mudança de variável do tipo

$$u - \frac{\mu K}{L^2} = V \quad (6.109)$$

assim, teremos

$$\frac{d^2 V}{d\theta^2} + V = 0 \quad (6.110)$$

que é a equação do OHS, cuja solução será

$$V = b \cos(\theta - \theta_0) \quad (6.111)$$

retornando a variável u ,

$$u - \frac{\mu K}{L^2} = b \cos(\theta - \theta_0) \quad (6.112)$$

$$u = \frac{\mu K}{L^2} + b \cos(\theta - \theta_0)$$

$$u = \frac{\mu K}{L^2} \left[1 + \frac{bL^2}{\mu K} \cos(\theta - \theta_0) \right] \quad (6.113)$$

Fazendo agora

$$\alpha = \frac{L^2}{\mu K} \quad e \quad P = \frac{bL^2}{\mu K} \quad (6.114)$$

e lembrando que

$$r = \frac{1}{u}$$

teremos a equação (6.113) da forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} [1 + P \cos(\theta - \theta_0)] \quad (6.115)$$

$$r = \frac{\alpha}{1 + P \cos(\theta - \theta_0)} \quad (6.116)$$

que será o mesmo resultado obtido na equação (6.105) caso ε seja igual a P . Demonstraremos que isto é verdadeiro.

Pela conservação de energia, equação (6.44), temos que

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{K}{r} = E$$

Quando $r = r_{\min}$, $\dot{r} = 0$. Nesse caso, teremos

$$E = \frac{L^2}{2\mu r_{\min}^2} - \frac{K}{r_{\min}} \quad (6.117)$$

Da equação (6.116), quando $r = r_{\min}$, $\cos(\theta - \theta_0) = 1$, de modo que

$$r_{\min} = \frac{\alpha}{1+P} \quad (6.118)$$

Substituindo o resultado acima em (6.117),

$$E = \frac{L^2}{2\mu} \frac{(1+P)^2}{\alpha^2} - \frac{K(1+P)}{\alpha} \quad (6.119)$$

e multiplicando a equação acima por $\frac{2\mu\alpha^2}{L^2}$, teremos

$$\frac{2\mu\alpha^2}{L^2} E = (1+P)^2 - \frac{2\mu\alpha^2 K}{L^2} \frac{(1+P)}{\alpha}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 + 2P + P^2 - \frac{2\mu\alpha K}{L^2} - \frac{2\mu\alpha K P}{L^2} - \frac{2\mu\alpha^2 E}{L^2} &= 0 \\ P^2 + 2\left(1 - \frac{\mu\alpha K}{L^2}\right)P + \left[1 - \frac{2\mu\alpha K}{L^2} - \frac{2\mu\alpha^2 E}{L^2}\right] &= 0 \end{aligned} \quad (6.120)$$

que é uma equação do 2º grau, cujas raízes serão

$$P_{1,2} = \frac{-2\left(1 - \frac{\mu\alpha K}{L^2}\right) \pm \sqrt{4\left(1 - \frac{\mu\alpha K}{L^2}\right)^2 - 4\left[1 - \frac{2\mu\alpha K}{L^2} - \frac{2\mu\alpha^2 E}{L^2}\right]}}{2} \quad (6.121)$$

O radicando da equação acima pode ser simplificado da forma

$$\begin{aligned} 4\left[1 - \frac{2\mu\alpha K}{L^2} + \left(\frac{\mu\alpha K}{L^2}\right)^2\right] - 4\left[1 - \frac{2\mu\alpha K}{L^2} - \frac{2\mu\alpha^2 E}{L^2}\right] &= \\ = 4\left(\frac{\mu\alpha K}{L^2}\right)^2 + 8\frac{\mu\alpha^2 E}{L^2} & \end{aligned} \quad (6.122)$$

$$= 4\left(\frac{\mu\alpha K}{L^2}\right)^2 \left[1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2}\right] \quad (6.123)$$

Substituindo (6.123) em (6.121),

$$P_{1,2} = -\left(1 - \frac{\mu\alpha K}{L^2}\right) \pm \frac{\mu\alpha K}{L^2} \left(1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2}\right)^{1/2} \quad (6.124)$$

Tomando a raiz positiva,

$$P = -1 + \frac{\mu\alpha K}{L^2} + \frac{\mu\alpha K}{L^2} \left(1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2}\right)^{1/2} \quad (6.125)$$

Observando que

$$\frac{\mu K \alpha}{L^2} = \frac{\mu K}{L^2} \frac{L^2}{\mu K} = 1 \quad (6.126)$$

(6.125) ficará

$$P = -1 + 1 + \left(1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2} \right)^{1/2} \quad (6.127)$$

$$= \left(1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2} \right)^{1/2} \quad (6.128)$$

$$= \varepsilon \quad (6.129)$$

de acordo com a equação (6.103). Assim,

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)} \quad (6.130)$$

O valor de θ_0 determina a orientação da órbita. Sem perda de generalidade podemos fazê-lo igual a zero $\theta_0 = 0$. Assim,

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (6.131)$$

Quando $r = r_{\min}$, $\cos(\theta - \theta_0)$ tem um máximo e $\theta = 0$. A escolha de $\theta_0 = 0$ significa medir θ a partir de $r_{\min}$. A posição em $r = r_{\min}$, é denominada de pericentro. Para $r = r_{\max}$, denominamos essa posição de apocentro. Quando estas se referem ao Sol (Lua), tomam os nomes de periélio e afélio (perigeu e apogeu) respectivamente. De forma geral, os pontos de aproximação máxima e mínima são denominados de apsides.

A equação da órbita descreve uma cônica de excentricidade ε . Mostramos na tabela 1 os valores de ε ; o tipo de curva e o valor de energia correspondente

ε	Curva	Energia
$\varepsilon = 0$	Círculo	$E = V_{\min}$
$0 < \varepsilon < 1$	Elipse	$V_{\min} < E < 0$
$\varepsilon = 1$	Parábola	$E = 0$
$\varepsilon > 1$	Hipérbole	$E > 0$

6-7 AS LEIS DE KEPLER

As Leis de Kepler para o movimento planetário foram formuladas com base nos dados empíricos do planeta Marte obtidos por Tycho Brahe e pelo próprio Kepler, e foram formuladas antes da Lei de Gravitação de Newton. Na verdade, Newton utilizou essas Leis para mostrar que a Lei de Gravitação tinha uma dependência com o inverso do quadrado da distância. Nesta seção, demonstraremos cada uma das Leis de Kepler, utilizando o material das seções precedentes.

A 1ª Lei de Kepler

"A órbita de cada planeta é uma elipse, com o Sol localizado em um dos seus focos".

Demonstração:

Mostramos na figura 6-6 uma elipse

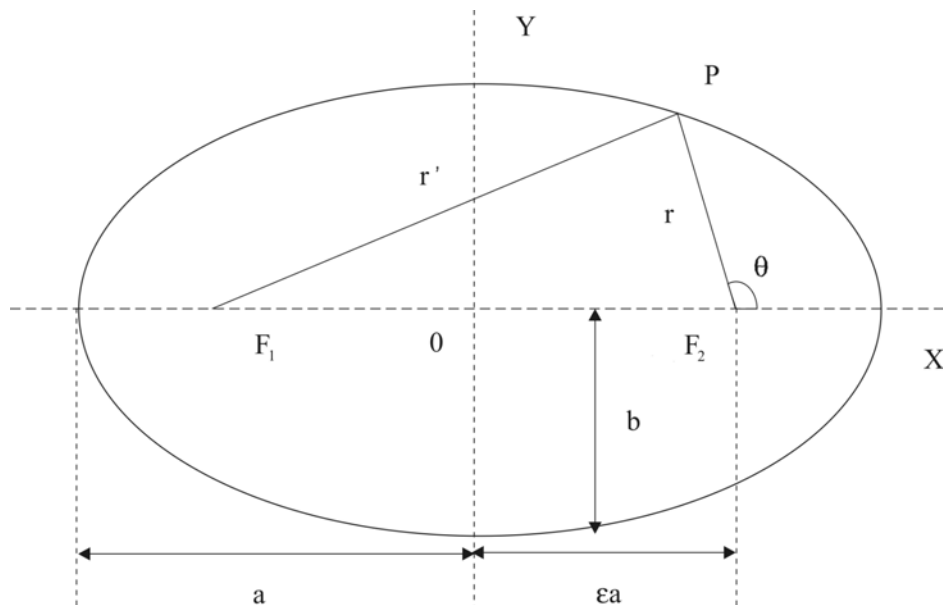


Figura 6-6

Para uma elipse a soma das distâncias do ponto P aos focos (F_1 e F_2) é constante

$$r' + r = 2a \quad (6.132)$$

Na equação acima, a é denominado de eixo maior. A distância do centro da elipse ao foco é dada por $a\varepsilon$, onde ε é a excentricidade. Aplicando a lei dos cossenos a figura 6-6, temos que

$$r'^2 = r^2 + (2a\varepsilon)^2 + 2r(2a\varepsilon)\cos\theta \quad (6.133)$$

$$r'^2 = r^2 + 4a^2\varepsilon^2 + 4ra\varepsilon\cos\theta \quad (6.134)$$

Substituindo o valor de r' , dado pela equação (6.132)

$$r' = 2a - r$$

Na equação (6.134), teremos

$$(2a - r)^2 = r^2 + 4a^2\varepsilon^2 + 4ra\varepsilon\cos\theta$$

$$4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4a^2\varepsilon^2 + 4ra\varepsilon\cos\theta$$

$$4ar(1 + \varepsilon\cos\theta) = 4a^2(1 - \varepsilon^2)$$

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\theta} \quad (6.135)$$

que é a equação da elipse em coordenadas polares com centro em um dos focos.

O semi-eixo menor da elipse (b) é dado por

$$b = a(1 - \varepsilon^2)^{1/2} \quad (6.136)$$

Sabemos que a equação da órbita [equação (6.131)] é dada por

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon\cos\theta} \quad (6.131)$$

Quando $r = r_{\max}$, $\theta = 0$

$$r_{\min} = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon} \quad (6.137)$$

Se a trajetória é uma elipse, observando a figura 6-6, teremos que

$$r_{\min} = a - a\varepsilon$$

$$r_{\min} = a(1 - \varepsilon) \quad (6.138)$$

Igualando (6.137) e (6.138), teremos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{1 + \varepsilon} &= a(1 - \varepsilon) \\ \alpha &= a(1 - \varepsilon^2) \end{aligned} \quad (6.139)$$

Comparando (6.131) com (6.135) vemos que (6.139) está de acordo com o esperado. Isso demonstra a 1ª Lei de Kepler.

Vejamos agora como relacionar os valores de a e b em termos dos parâmetros do problema. Pela equação (6.103), sabemos que

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\mu K^2} \quad \alpha = \frac{L^2}{\mu K} \quad (6.103)$$

Dessa equação, vemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 - 1 &= \frac{2EL^2}{\mu K^2} \\ (1 - \varepsilon^2) &= -\frac{2EL^2}{\mu K^2} \\ &= \frac{2|E|L^2}{\mu K^2} \end{aligned} \quad (6.140)$$

Devemos lembrar que a energia para o movimento elíptico é negativa. Da equação (6.139)

$$a = \frac{\alpha}{(1 - \varepsilon^2)} \quad (6.141)$$

Substituindo (6.140) e o valor de α [equação (6.103)] em (6.141), teremos

$$\begin{aligned} a &= \frac{L^2}{\mu K} \frac{\mu K}{2|E|L^2} \\ a &= \frac{K}{2|E|} \end{aligned} \quad (6.142)$$

Substituindo agora (6.142) e (6.140) em (6.136), o semi-eixo menor será dado por

$$\begin{aligned} b &= a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \\ &= \frac{K}{2|E|} \left[\frac{2|E|L^2}{\mu K^2} \right]^{1/2} \\ b &= \frac{L}{(2\mu|E|)^{1/2}} \end{aligned} \quad (6.143)$$

Utilizando a equação da trajetória [equação (6.131)], com o valor de α dado por (6.139), teremos

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (6.144)$$

Quando $\theta = 0$, $r = r_{\min}$, isto é, teremos o valor de mínima aproximação

$$r_{\min} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon}$$

$$r_{min} = a(1 - \varepsilon) \quad (6.145)$$

Quando $\theta = \pi$, teremos o valor de máximo afastamento

$$r_{max} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon}$$

$$r_{max} = a(1 + \varepsilon) \quad (6.146)$$

A 2ª Lei de Kepler

"O raio vetor que liga um planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais".

Demonstração:

Mostramos na Figura 6-7 o movimento de um planeta em torno do Sol.

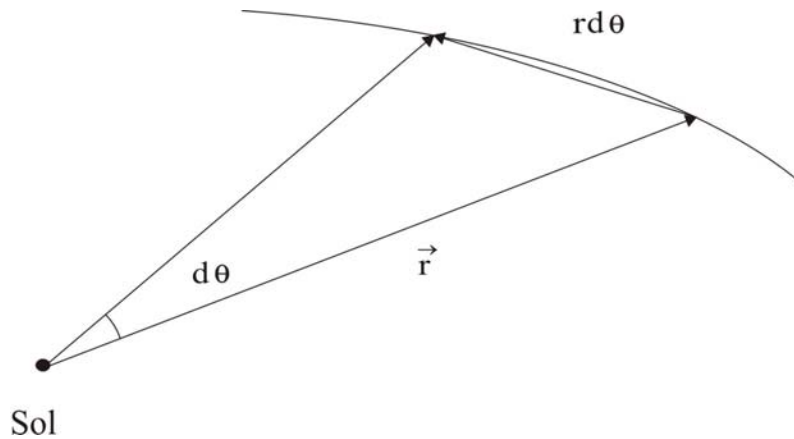


Figura 6-7

O elemento de área dS que o raio vetor r varre é dado por

$$dS = \frac{1}{2} r (rd\theta) \quad (6.147)$$

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Dividindo pelo tempo gasto dt

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (6.148)$$

Escrevendo a equação (6.148) em termos do momento angular L

$$L = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\mu r^2 \dot{\theta}}{2\mu} \\ \frac{dS}{dt} &= \frac{L}{2\mu}\end{aligned}\quad (6.149)$$

Como a força é central, o momento angular se conserva, de modo que

$$\frac{dS}{dt} = \text{constante} \quad (6.150)$$

Denominamos dS/dt de velocidade areolar, que representa a taxa com que a área é varrida pelo raio vetor, o que demonstra a validade da 2ª Lei. Na verdade, a 2ª Lei tem validade para qualquer força central (onde o momento angular se conserva) e não apenas quando a força tem a dependência com o inverso do quadrado da distância, como a Lei de Gravitação.

Quando os planetas giram em torno do Sol, eles não o fazem com a mesma velocidade em todos os pontos. Próximos ao Sol, os planetas têm uma velocidade maior do que quando estão mais afastados. Isso pode ser visto analisando a 2ª Lei. Mostramos na figura 6-8 o movimento de um planeta em torno do Sol

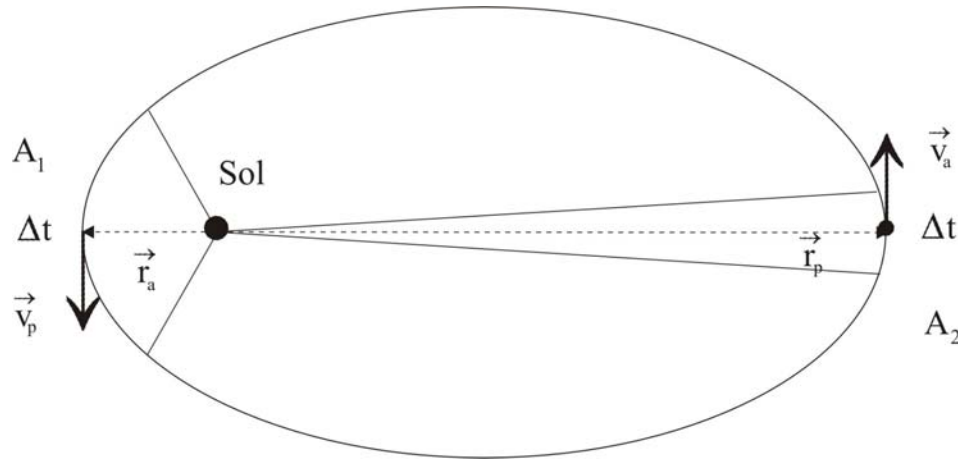


Figura 6-8

Pela 2ª Lei, para um mesmo Δt , a área A_1 será igual a área A_2 . Para que isso seja verdade, o planeta deve ter uma velocidade maior próximo ao Sol. Podemos demonstrar matematicamente esse problema utilizando a conservação do momento angular para os pontos: mais próximo (periélio) e mais afastado (afélio) do Sol.

$$\vec{L}_p = \vec{L}_a \quad (6.151)$$

$$\vec{r}_p \times \vec{P}_p = \vec{r}_a \times \vec{P}_a$$

$$r_p P_p = r_a P_a$$

$$r_p V_p = r_a V_a \quad (6.152)$$

$$\frac{r_p}{V_a} = \frac{r_a}{V_p} \quad (6.153)$$

Como r_p é menor que r_a , V_p deve ser maior que V_a , que demonstra nossa hipótese.

A 3ª Lei de Kepler

"O quadrado do período de revolução de um planeta em torno do Sol é diretamente proporcional ao cubo do semi-eixo maior da órbita do planeta".

Demonstração:

Da equação (6.149),

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2\mu} \quad (6.149)$$

Integrando a equação acima em uma volta completa, teremos

$$\int dS = \int_0^\tau \frac{L}{2\mu} dt \quad (6.154)$$

onde τ é o período.

$$S = \frac{L}{2\mu} \tau \quad (6.155)$$

Vejamos como encontrar a área da elipse.

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (6.156)$$

Substituindo na equação anterior o valor de r , dado pela equação (6.144),

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos \theta} \right]^2 d\theta \quad (6.157)$$

$$S = \frac{1}{2} a^2 (1-\varepsilon^2)^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2}$$

Vejamos como calcular essa integral,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2} = 2 \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cos \theta)^2}$$

$$2 \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{2\varepsilon \sin \theta}{(\varepsilon^2 - 1)(1 + \varepsilon \cos \theta)} \Big|_0^\pi - \frac{2}{(\varepsilon^2 - 1)} \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{-2}{(\varepsilon^2 - 1)} \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)}$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)} &= \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \arctg \left[\frac{(1 - \varepsilon) \operatorname{tg}(\theta/2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right] \Big|_0^\pi \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] \end{aligned}$$

então,

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{-2}{(\varepsilon^2 - 1)} \frac{\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} = \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$

Sendo assim,

$$S = \frac{1}{2} a^2 (1 - \varepsilon^2)^2 \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$

$$S = \pi a^2 (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \quad (6.158)$$

$$S = \pi a a (1 - \varepsilon^2)^{1/2}$$

Substituindo (6.136) na equação anterior, teremos

$$S = \pi ab \quad (6.159)$$

Substituindo (6.159) em (6.155),

$$\pi ab = \frac{L}{2\mu} \tau \quad (6.160)$$

$$\tau = \frac{2\mu}{L} \pi ab$$

$$\tau = \frac{2\mu}{L} \pi a^2 (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \quad (6.161)$$

Usando a equação (6.140) em (6.161),

$$\tau = \frac{2\mu}{L} \pi a^2 \left[\frac{2|E|L^2}{\mu K^2} \right]^{1/2} \quad (6.162)$$

$$= 2\pi a^2 \left[\frac{\mu}{K} \frac{2|E|}{K} \right]^{1/2} \quad (6.163)$$

Da equação (6.142),

$$a = \frac{K}{2|E|} \quad (6.142)$$

assim,

$$\tau = 2\pi a^2 \left[\frac{\mu}{K} \right]^{\frac{1}{2}} a^{-1/2} \quad (6.164)$$

$$\tau = 2\pi \left[\frac{\mu}{K} \right]^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} \quad (6.165)$$

Tomando o quadrado de τ ,

$$\tau^2 = 4\pi^2 \left[\frac{\mu}{K} \right] a^3 \quad (6.166)$$

Sabemos que o valor de K é dado por

$$K = Gm_1m_2$$

e que

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \quad (6.21)$$

assim

$$\frac{\mu}{K} = \frac{1}{G(m_1 + m_2)}$$

De modo que a equação (6.166) pode ser escrita da forma

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \quad (6.167)$$

que demonstra a 3ª Lei

Na próxima seção estudaremos a dinâmica orbital.

6-8 DINÂMICA ORBITAL

Nesta seção, enfocaremos a dinâmica orbital, que trata do movimento de um corpo sob a ação de uma força central, a gravidade, quando se faz lançamento de sondas e naves espaciais. A solução exata desse problema é extremamente complicada e está fora do escopo deste curso. Entretanto podemos tratar de problemas onde os efeitos dos outros corpos são negligenciados.

De forma geral, as viagens espaciais podem ser classificadas de três formas: a primeira, onde o consumo de energia é minimizado; a segunda, onde o tempo de viagem é minimizado; e a terceira onde a assistência gravitacional é utilizada, como forma de minimizar o consumo de energia e o tempo gasto na viagem, simultaneamente. A seguir, discutiremos como realizar essas viagens. Desprezaremos as atrações entre os outros planetas.

No processo de transferência de Hohmann, o consumo de energia é minimizado. Neste processo, para fazermos uma viagem a Marte, por exemplo, usamos um foguete de dois estágios, que serão utilizados para fazer a transferência de órbita. Mostramos na figura 6-9, o movimento circular da Terra e de Marte em torno do Sol.

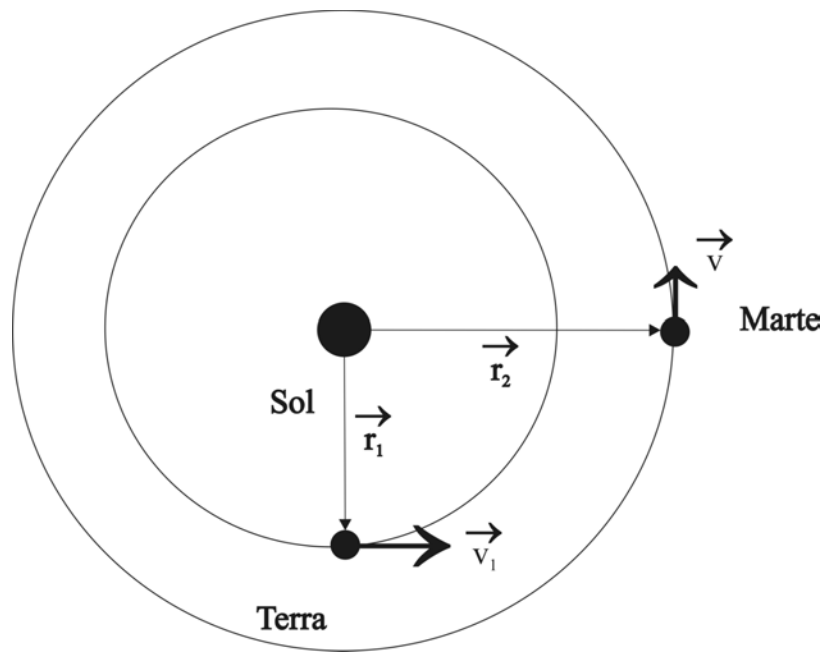


Figura 6-9

Para a Terra, essa aproximação de movimento circular é boa; para Marte, nem tanto, uma vez que a excentricidade de Marte (0,093) é menor apenas que a de Plutão (0,249) e a de Mercúrio (0,206). Entretanto isso não compromete o entendimento do processo, que consiste em utilizar cada um dos estágios do foguete para aumentar a velocidade da nave, na direção perpendicular ao raio vetor que liga a nave ao Sol, de modo que a relação

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \quad (6.168)$$

continue sendo válida. Essa relação garante que nem os pontos de retorno, nem o plano da órbita mudam. Aumentando a velocidade no afélio, a energia e o momento angular

aumentam, aumentando o valor da excentricidade, de modo que a órbita passa de circular para elíptica. Essa elipse é escolhida de forma a interceptar a órbita circular de Marte no periélio, conforme mostra a figura 6-10.

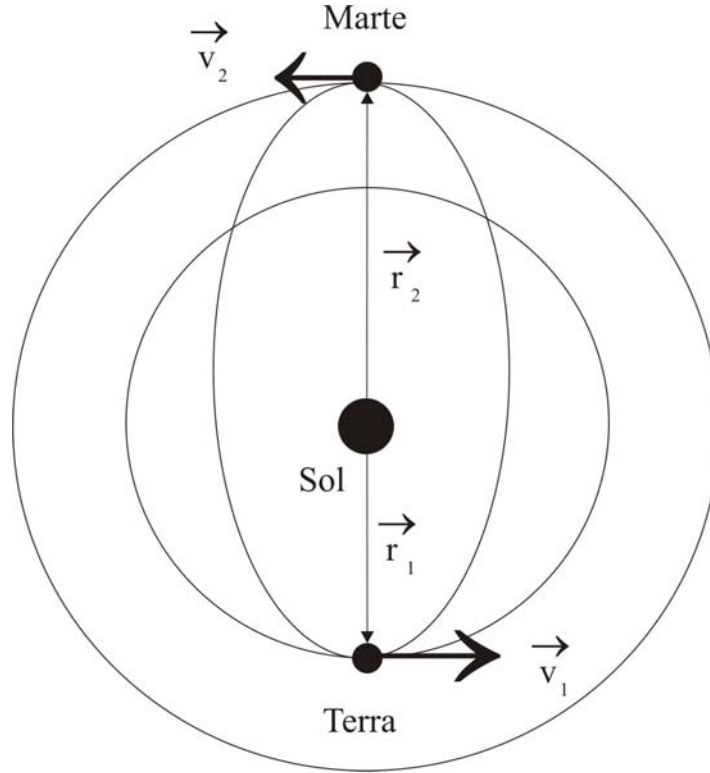


Figura 6-10

Neste ponto, utiliza-se o outro estágio para transferir a nave do movimento elíptico em torno do Sol (com raios maior r_2 e menor r_1) para um movimento circular em torno do Sol com raio r_2 .

Calcularemos agora o aumento na velocidade necessário para realizar a transferência em cada uma das etapas.

1ª Etapa:

Transferência da órbita circular de raio r_1 em torno do Sol para elíptica em torno do Sol com semi-eixos maior e menor dados por r_2 e r_1 .

A energia total para um objeto em órbita circular ou elíptica em torno do Sol é dada pela equação (6.142)

$$E = -\frac{K}{2a} \quad (6.169)$$

Para o círculo, a é o raio r_1 ; para a elipse, o semi-eixo maior

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (6.170)$$

assim, a energia total em r_1 será

$$E_1 = T_1 + V_1 \quad (6.171)$$

$$-\frac{K}{2r_1} = \frac{1}{2}mV_1^2 - \frac{K}{r_1} \quad (6.172)$$

$$\frac{1}{2}mV_1^2 = -\frac{K}{2r_1} + \frac{K}{r_1}$$

$$\frac{1}{2}mV_1^2 = \frac{K}{2r_1}$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{K}{mr_1}} \quad (6.173)$$

Ao fazermos a transferência do círculo para a elipse, teremos

$$E_2 = T_1 + V_1 \quad (6.174)$$

$$-\frac{K}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2}mV_{t_1}^2 - \frac{K}{r_1} \quad (6.175)$$

em que V_{t_1} é a velocidade de transferência para o periélio, que tem a mesma direção e sentido de V_1 . Resolvendo (6.175) para V_{t_1}

$$\frac{1}{2}mV_{t_1}^2 = K \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right] \quad (6.176)$$

$$V_{t_1} = \sqrt{\frac{2K}{m} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} \quad (6.177)$$

$$V_{t_1} = \sqrt{\frac{2K}{m} \cdot \frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} \quad (6.178)$$

$$V_{t_1} = \sqrt{\frac{K}{mr_1} \cdot \frac{2r_2}{(r_1 + r_2)}} \quad (6.179)$$

De (6.173)

$$V_{t_1} = V_1 \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} \quad (6.180)$$

$$> V_1$$

A variação de velocidade necessária para fazer a transferência será dada por

$$\Delta V_1 = V_{t_1} - V_1 \quad (6.181)$$

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{K}{mr_1} \cdot \frac{2r_2}{(r_1 + r_2)}} - \sqrt{\frac{K}{mr_1}} \quad (6.182)$$

$$\Delta V_1 = V_1 \left[\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right] \quad (6.183)$$

2ª Etapa:

Transferência da órbita elíptica em torno do Sol com semi-eixos maior (r_2) e menor (r_1) para circular de raio r_2 em torno do Sol.

A energia total para o movimento circular em torno do Sol é dada por

$$-\frac{K}{2r_2} = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{K}{r_2} \quad (6.184)$$

Resolvendo para V_2

$$V_2 = \sqrt{\frac{K}{mr_2}} \quad (6.185)$$

tomando agora a energia no periélio

$$-\frac{K}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2}mV_{t_2}^2 - \frac{K}{r_2} \quad (6.186)$$

em que $V_{t_2}^2$ é a velocidade de transferência para a órbita circular, que tem a mesma direção e sentido de V_2 . Resolvendo (6.186) para $V_{t_2}^2$,

$$V_{t_2}^2 = \frac{2K}{m} \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right] \quad (6.187)$$

$$V_{t_2} = \sqrt{\frac{2K}{m} \frac{r_1}{r_2(r_1 + r_2)}} \quad (6.188)$$

$$V_{t_2} = \sqrt{\frac{K}{mr_2} \frac{2r_1}{(r_1 + r_2)}} \quad (6.189)$$

Usando (6.185) na equação acima,

$$V_{t_2} = V_2 \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} < V_2 \quad (6.200)$$

Assim, o aumento na velocidade para fazer a transferência da órbita elíptica para a circular será dado por

$$\Delta V_2 = V_2 - V_{t_2}$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{K}{mr_2}} - \sqrt{\frac{K}{mr_2} \frac{2r_1}{(r_1 + r_2)}} \quad (6.201)$$

$$\Delta V_2 = V_2 \left[1 - \sqrt{\frac{2r_1}{(r_1 + r_2)}} \right] \quad (6.202)$$

O aumento total na velocidade será

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (6.203)$$

Com ΔV_1 e ΔV_2 dados pelas equações (6.183) e (6.202).

O tempo mínimo para fazer a transferência pelo processo de Hohmann é igual a metade do período da órbita transferida

$$T_t = \frac{\tau_t}{2} \quad (6.204)$$

em que τ_t é dado pela equação (6.167)

$$\tau_t = \left[\frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \right]^{1/2} \quad (6.205)$$

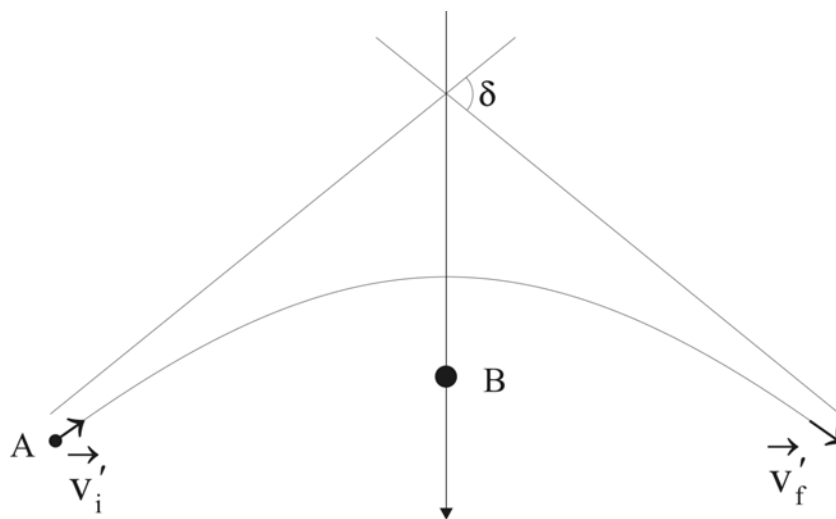
assim, pela equação (6.204)

$$T_t = \pi \left[\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)} \right]^{1/2} \quad (6.206)$$

Da equação anterior, m_1 e m_2 são os valores das massas do Sol e de Marte, respectivamente. Observando essa equação, vemos que T_t pode ser muito grande. Para Marte, τ_t é da ordem de $2,24 \cdot 10^7$ s (259 dias) que é um tempo muito grande. Para diminuirmos o tempo de transferência, podemos utilizar mais combustível ou a assistência gravitacional.

Na assistência gravitacional, a transferência é feita em duas etapas: na primeira, faz-se o escape do campo gravitacional da Terra; na segunda, faz-se a transferência para uma região onde um outro corpo, por atração gravitacional, defletirá a nave para a região de interesse. Após a deflexão, a velocidade da nave é maior que seu valor inicial, diminuindo, assim, o tempo de percurso. Vejamos como isso acontece. Para viagens a planetas com órbita maior que a da Terra em torno do Sol, devemos fazer o lançamento na direção da velocidade orbital da Terra em torno do Sol, como forma de utilizar esse valor como velocidade inicial adicional à necessária ao escape do campo gravitacional do Sol. O próximo passo é lançar a nave na direção de um outro planeta que fará a assistência

gravitacional, defletindo a nave em uma trajetória parabólica, conforme mostra a figura 6-11.



Direção do movimento do
corpo B em relação a um
referencial inercial

Figura 6-11

Nessa figura, o corpo A representa a nave; o corpo B, o planeta que irá fazer a assistência gravitacional; $\vec{V}_i$ e $\vec{V}_f$ as velocidades inicial e final da nave em relação a B; e δ o ângulo de deflexão que a nave irá sofrer. Visto de um referencial inercial, teremos a composição de velocidades mostrada na figura 6-12.

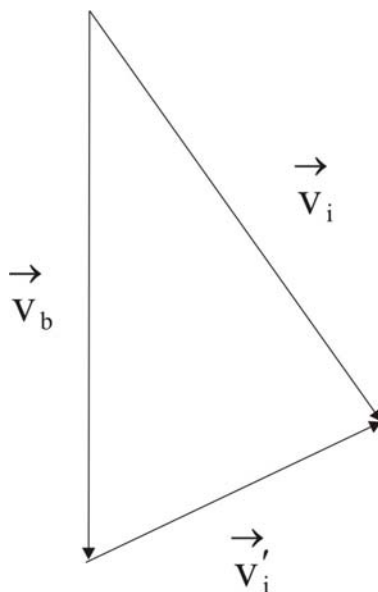


Figura 6-12

onde V_i representa a velocidade da nave em relação ao referencial inercial e V_b a velocidade do corpo B também tomada em relação ao referencial inercial. Mostramos na figura 6-13 a mudança (aumento) da velocidade e o desvio sofrido pela nave

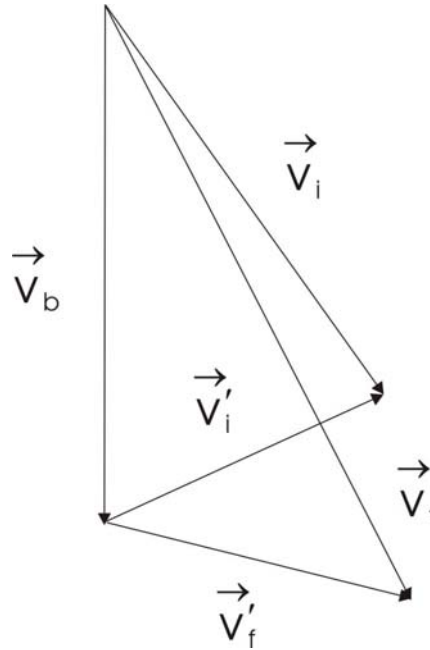


Figura 6-13

Nessa figura, $\vec{V}_f$ é a velocidade após a deflexão, vista do referencial inercial. Deve-se observar que houve um ganho de velocidade, pois $\vec{V}_f$ é maior que $\vec{V}_i$.

6-9 ÓRBITAS HIPERBÓLICAS

Mostramos nas seções anteriores que para forças atrativas, quando a energia da partícula é positiva, a trajetória descrita por esta será hiperbólica. Para forças repulsivas, a energia da partícula sempre será positiva, uma vez que tanto a energia cinética quanto a energia potencial são positivas. Nesse caso, a trajetória também será uma hipérbole. Quando não existe força de interação, a trajetória será uma reta, isto é, a partícula não será defletida de sua trajetória original. Ilustramos na figura 6-14 esses casos.

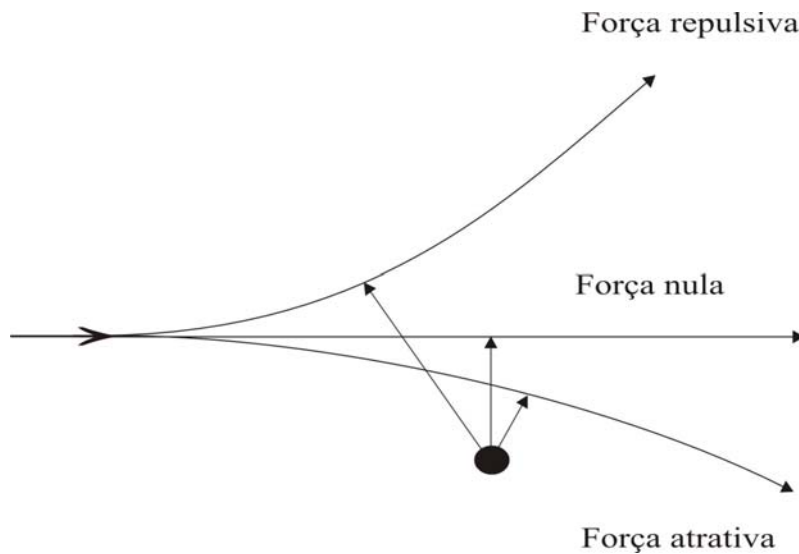


Figura 6-14

Para duas partículas de cargas Q_1 e Q_2 , a força de Coulomb é dada por,

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r} \quad (6.207)$$

Quando as cargas têm o mesmo sinal (sinais contrários) a força é de repulsão (atração), de modo que podemos representar isso por uma equação do tipo

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \hat{r} \quad (6.208)$$

Se $K > 0$ ($K < 0$) a força será atrativa (repulsiva). A figura 6-15 mostra as trajetórias para os dois casos acima citados.

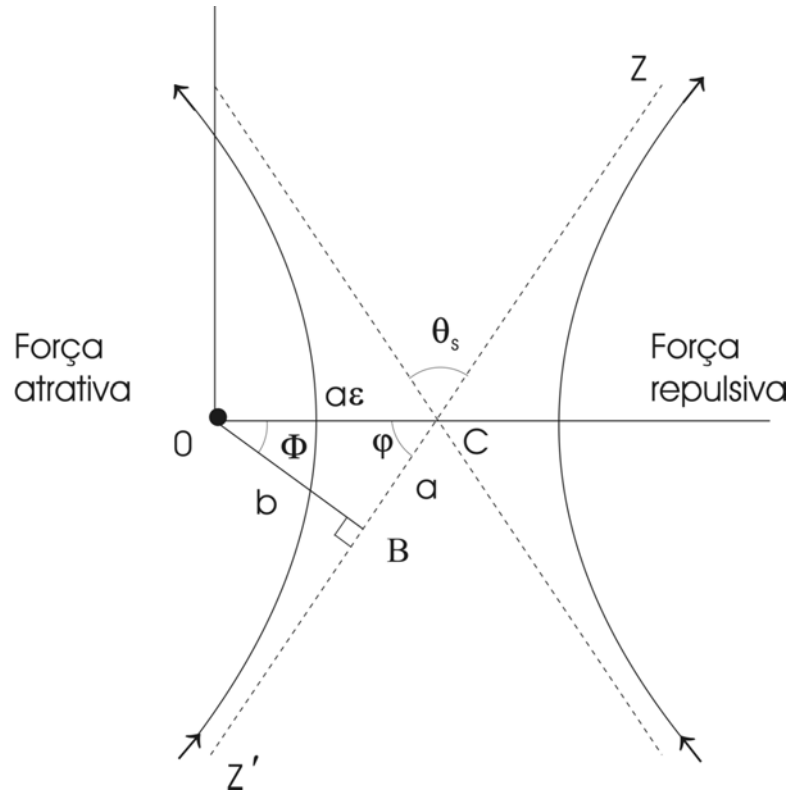


Figura 6-15

Nessa figura, o centro de força está localizado no ponto O. Caso nenhuma força atuasse na partícula espalhada, sua trajetória seria ao longo da linha zz' , passando a uma distância de máxima aproximação b , denominada de parâmetro de impacto. Para uma força repulsiva ($K < 0$) a partícula será espalhada de um ângulo θ_s , em que

$$\theta_s = \pi - 2\varphi \quad (6.209)$$

Observando o triângulo OCB, vemos que

$$\begin{aligned} \Phi + \varphi &= \pi/2 \\ \varphi &= \pi/2 - \Phi \end{aligned} \quad (6.210)$$

em que

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{a}{b}$$

isto é,

$$\Phi = \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \right) \quad (6.211)$$

De (6.209) temos que

$$4\varphi + 2\theta_s = 2\pi$$

$$2\varphi + \theta_s = \pi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_s}{2} \quad (6.212)$$

Igualando (6.210) e (6.212),

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_s}{2} &= \frac{\pi}{2} - \Phi \\ \theta_s &= 2\Phi \end{aligned} \quad (6.213)$$

Usando (6.211) em (6.213),

$$\theta_s = 2 \arctg \frac{a}{b} \quad (6.214)$$

Pelo princípio de conservação de energia

$$E = \frac{1}{2} MV^2 + \left(-\frac{K}{r} \right) \quad (6.215)$$

No caso de força repulsiva podemos escrever (6.142) da forma

$$a = \frac{|K|}{2E} \quad (6.216)$$

Assim, (6.215) pode ser escrita da forma

$$\frac{MV^2}{2} - \frac{K}{r} = \frac{|K|}{2a} \quad (6.217)$$

Quando $r \rightarrow \infty$, o potencial $-K/r$ tende a zero. Denotando a velocidade no infinito por

$V = V_\infty$, podemos escrever (6.217) como

$$\frac{MV_\infty^2}{2} = \frac{|K|}{2a} \quad (6.218)$$

Resolvendo (6.218) para a

$$a = \frac{|K|}{MV_\infty^2} \quad (6.219)$$

e substituindo (6.219) em (6.214),

$$\theta_s = 2 \arctg \left(\frac{|K|}{bMV_\infty^2} \right) \quad (6.220)$$

Observe que quanto menor é o parâmetro de impacto (b) maior será o ângulo de espalhamento (θ_s).

Uma importante aplicação do formalismo desenvolvido nesta seção é a famosa experiência de Rutherford, onde um feixe de partículas α (átomos de hélio duplamente

ionizados) é feito incidir em uma folha muito fina de um metal. A folha de metal é suficientemente fina de modo que as partículas α conseguem atravessá-la, sofrendo várias deflexões em sua trajetória, devido à interação colombiana entre o núcleo, carregado positivamente, e as partículas α . Na experiência, um grande número de partículas compõe o feixe, de modo que diferentes partículas terão diferentes parâmetros de impacto e serão refletidas em diferentes ângulos. Mostramos na figura 6-16 como isso acontece.

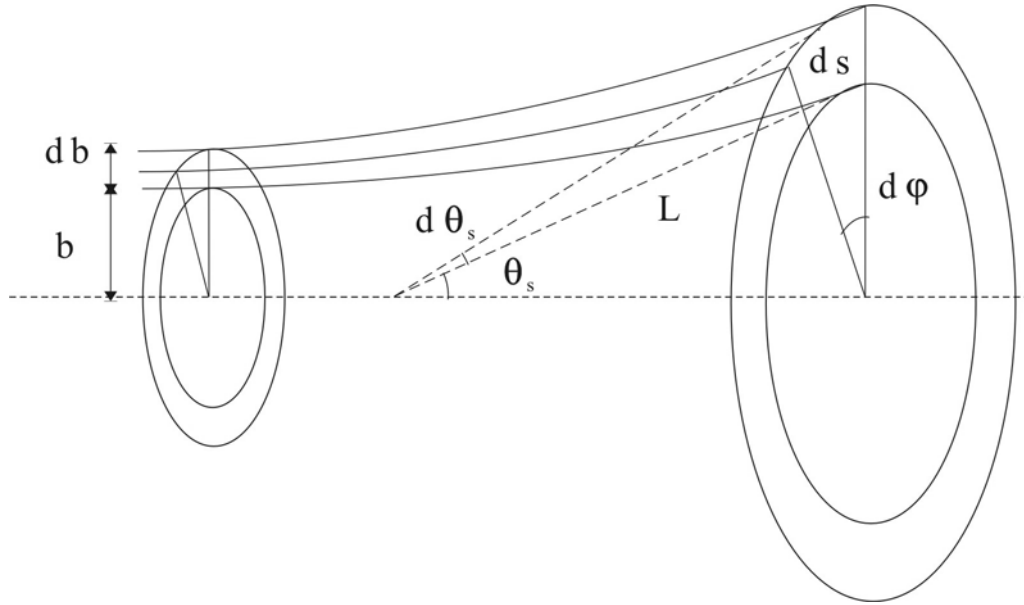


Figura 6-16

Consideremos que o feixe seja constituído de n partículas por unidade de volume. Definimos a intensidade de feixe (I) ou densidade de fluxo, como o número de partículas do feixe que atravessa uma área normal ao feixe por unidade de tempo. A seção de choque diferencial de espalhamento é dada pelo número de interação por partícula alvo que é espalhada em $d\Omega_s$ no ângulo θ_s , dividido pelo número de partículas incidentes por unidade de área. Se dN é o número de partículas espalhadas em $d\Omega_s$ por unidade de tempo

$$\sigma(\theta_s)d\Omega_s = \frac{dN}{I} \quad (6.221)$$

$$\sigma(\theta_s) = \frac{d\sigma}{d\Omega_s} \quad (6.222)$$

$$\sigma(\theta_s) = \frac{1}{I} \frac{dN}{d\Omega_s} \quad (6.223)$$

Da definição de ângulo sólido (veja a figura 6-16), temos que

$$d\Omega_s = \frac{dS}{L^2} \quad (6.224)$$

$$d\Omega_s = \frac{(Ld\theta_s)L\sin\theta_s d\varphi}{L^2}$$

$$d\Omega_s = \sin\theta_s d\theta_s d\varphi \quad (6.225)$$

As partículas detectadas em dS são aquelas que passaram entre b e $b + db$, isto é,

$$dN = I(bd\varphi)db \quad (6.226)$$

Substituindo (6.226) e (6.225) em (6.223),

$$\sigma(\theta_s) = \frac{1}{I} \frac{Ibd\varphi db}{\sin\theta_s d\theta_s d\varphi}$$

$$\sigma(\theta_s) = -\frac{b}{\sin\theta_s} \frac{db}{d\theta_s} \quad (6.227)$$

O sinal menos é introduzido pelo fato de que um aumento no parâmetro de impacto leva a uma diminuição da força que atua na partícula, diminuindo o ângulo de espalhamento. A equação (6.227) tem validade geral, isto é, é válida para qualquer Lei de Força.

Resolvendo a equação (6.220) para b ,

$$tg \frac{\theta_s}{2} = \frac{|K|}{bmV_\infty^2} \quad (6.220)$$

$$b = \frac{|K|}{mV_\infty^2} \frac{1}{tg(\theta_s/2)}$$

$$b = \frac{|K|}{mV_\infty^2} \cotg\left(\frac{\theta_s}{2}\right) \quad (6.228)$$

Derivando b em relação a θ_s ,

$$\frac{db}{d\theta_s} = -\frac{|K|}{mV_\infty^2} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\theta_s}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{db}{d\theta_s} = -\frac{|K|}{2mV_\infty^2} \frac{1}{\sin^2(\theta_s/2)} \quad (6.229)$$

Substituindo (6.228) e (6.229) em (6.227),

$$\sigma(\theta_s) = -\frac{|K|}{mV_\infty^2} \cotg\left(\frac{\theta_s}{2}\right) \frac{1}{\sin\theta_s} \left[-\frac{|K|}{2mV_\infty^2} \frac{1}{\sin^2(\theta_s/2)} \right] \quad (6.230)$$

Usando as identidades trigonométricas

$$\sin\theta_s = \sin\left(\frac{\theta_s}{2} + \frac{\theta_s}{2}\right)$$

$$\sin\theta_s = 2\sin\frac{\theta_s}{2} \cos\frac{\theta_s}{2} \quad (6.231)$$

$$\cotg \frac{\theta_s}{2} = \frac{\cos(\theta_s/2)}{\sin(\theta_s/2)} \quad (6.232)$$

na equação (6.230),

$$\sigma(\theta_s) = \frac{|K|^2}{2(mV_\infty)^2} \frac{\cancel{\cos(\theta_s/2)}}{\sin(\theta_s/2)} \frac{1}{\sin^2(\theta_s/2)} \frac{1}{2 \sin(\theta_s/2) \cancel{\cos(\theta_s/2)}} \quad (6.233)$$

$$\sigma(\theta_s) = \frac{K^2}{4(mV_\infty)^2} \frac{1}{\sin^4(\theta_s/2)}$$

$$\sigma(\theta_s) = \frac{K^2}{4 \left(\frac{mV_\infty^2}{2} \right)^2} \frac{1}{\sin^4(\theta_s/2)}$$

$$\sigma(\theta_s) = \left(\frac{K}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta_s/2)} \quad (6.234)$$

em que

$$E = \frac{mV_\infty^2}{2} \quad (6.235)$$

é a energia inicial da partícula antes de ser espalhada. A equação (6.234) foi deduzida por Rutherford para explicar os resultados experimentais do espalhamento de partículas α ao atravessar uma fina placa de metal. Nesse experimento, realizado por Geiger e Marsden, as partículas α são espalhadas pelos núcleos dos átomos que compõem a placa. Em sua formulação, Rutherford considerou que as partículas α incidentes não interagem mais de uma vez com os núcleos.

Devemos observar que o resultado obtido independe do valor de K , isto é, se a força de interação é atrativa ou repulsiva. Outro fato relevante é que o mesmo resultado é obtido quando usamos a Mecânica Quântica (não relativística).

GRAVITAÇÃO

7-1 INTRODUÇÃO

Newton formulou sua teoria de gravitação em 1666. Entretanto publicou seus resultados no livro “PRINCIPIA” apenas em 1687. Acredita-se que a demora da publicação deve-se principalmente ao fato de que Newton não sabia explicar porque o seu método numérico podia considerar que a distância entre objetos envolvidos (por exemplo, a Terra e a Lua) fosse a distância entre seus centros geométricos, isto é, podia considerar a Terra e a Lua como pontos materiais. Uma possível justificativa para esse procedimento seria observar que a distância entre os objetos é muito maior que o tamanho de seus raios. Entretanto, caso o problema em análise seja o de uma maçã caindo próximo à superfície da Terra, sob a ação da gravidade, essa justificativa não poderia ser utilizada, tornando o argumento insustentável.

Neste capítulo, apresentaremos a teoria de gravitação Newtoniana, justificando o problema mencionado no parágrafo anterior.

Um outro problema não entendido por Newton era o de como ocorre a interação gravitacional entre dois corpos. Apresentaremos o conceito de campo, que é útil na compreensão do problema. Sua solução só foi possível com o advento da TRG de Einstein, que não faz parte da ementa do curso de MT1.

7-2 A LEI DE NEWTON PARA A GRAVITAÇÃO

A lei de Newton para a gravitação nos diz que:

“A força gravitacional de atração entre dois objetos no Universo é diretamente proporcional ao produto de suas massas e é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre estes”.

Assim, a força de atração entre dois corpos (partículas) com massas m_i e m_j , separada pela distância $\vec{r}_{ij}$ é dada por:

$$\vec{F}_{ij} = -G \cdot \frac{m_i \cdot m_j}{r_{ij}^2} \cdot \hat{r}_{ij} \quad (7.1)$$

conforme mostra a figura 7-1

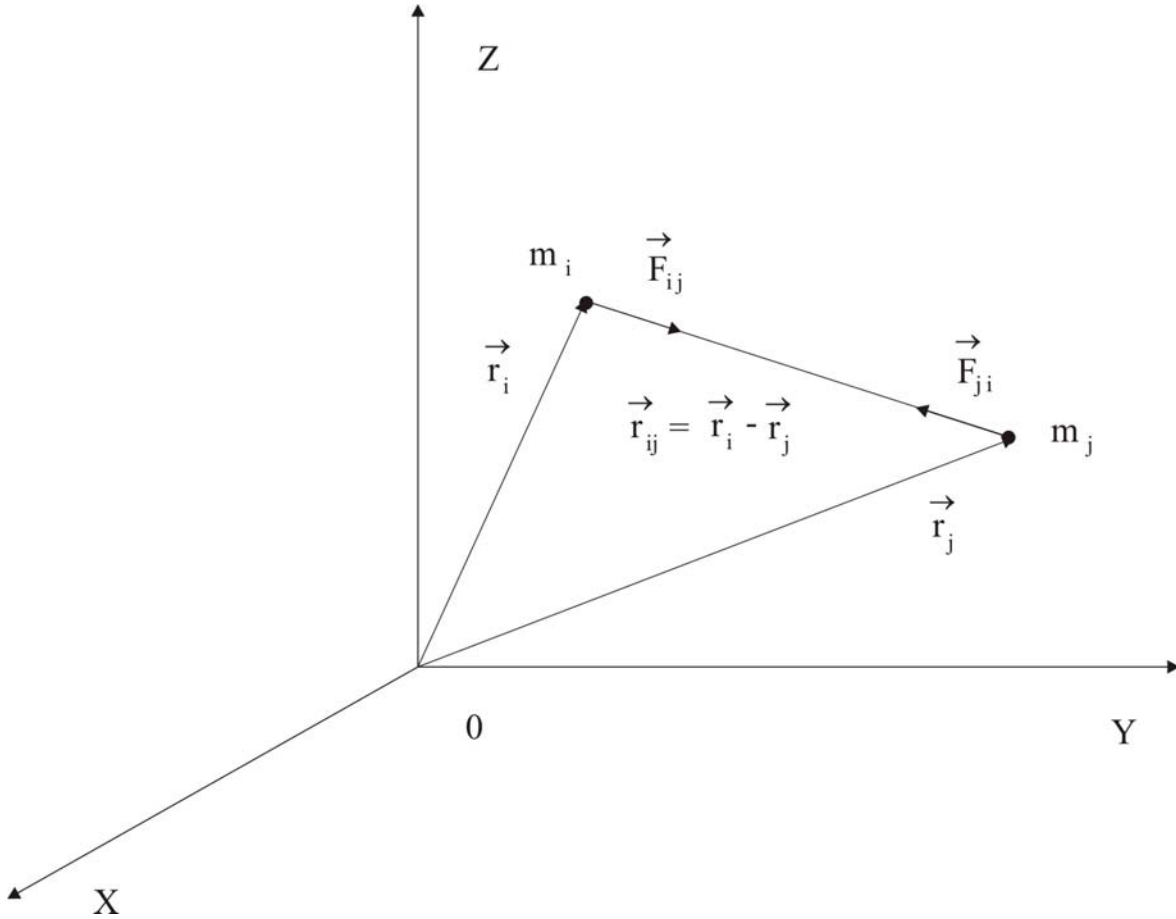


Figura 7-1

$\hat{r}_{ij}$ é o vetor unitário na direção de $\vec{r}_{ij}$; $G = 6,6726 \pm 0,0008 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$ é a constante gravitacional; $\vec{F}_{ij}$ é a força que a partícula i é atraída pela partícula j ; o sinal negativo indica que a força é atrativa. Pela 3ª Lei de Newton

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (7-2)$$

Caso as massas não possam ser consideradas como partículas e tenham um formato arbitrário, a distância entre estas não fica bem definida, nem fica(m) claro(s) o(s) ponto(s) e a direção em que a força age. Para analisarmos esses problemas, tomemos um corpo de massa M , de formato arbitrário e uma massa pontual m , conforme mostra a figura 7-2

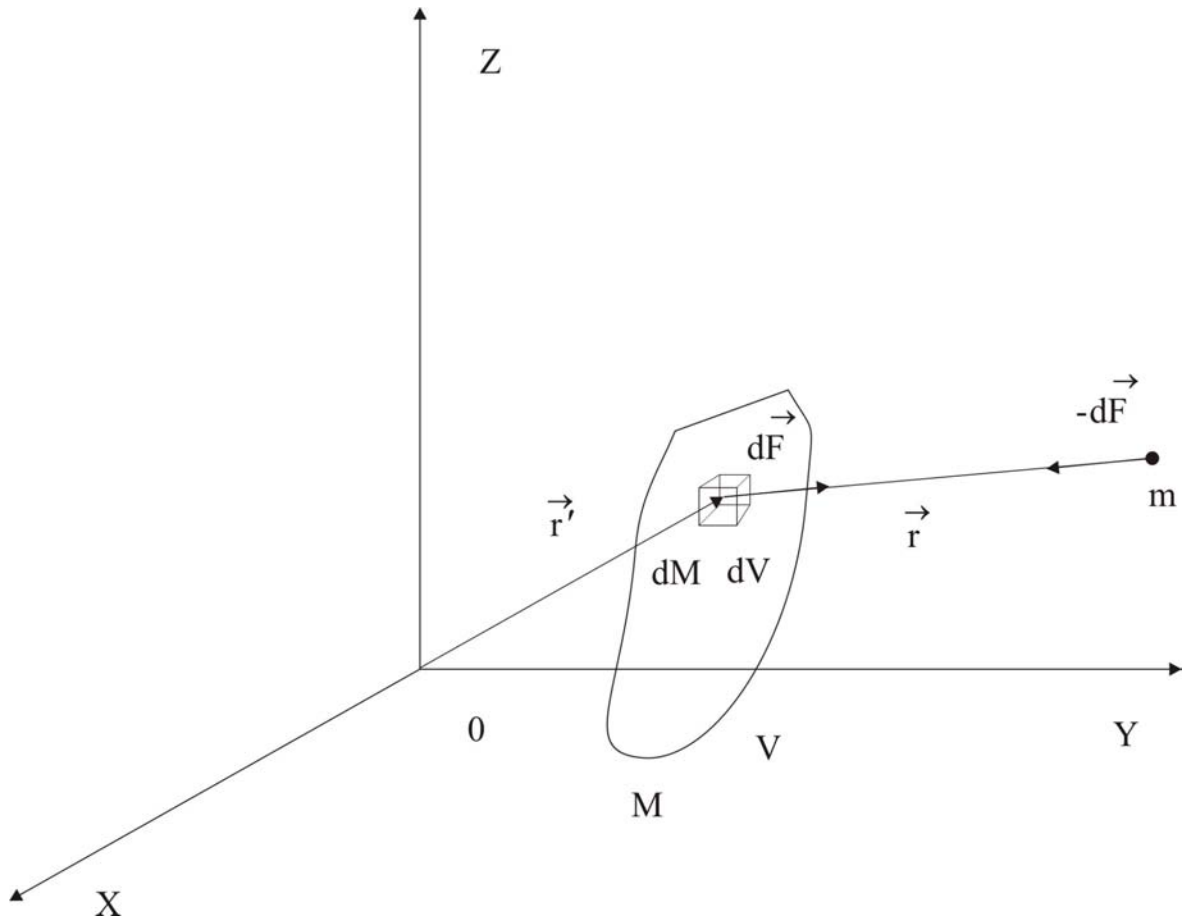


Figura 7-2

Para computarmos a força total, dividimos o corpo de massa M em pequenos elementos de massa dM . Cada um desses elementos é atraído por m por uma força $d\vec{F}$. Considerando que o campo gravitacional seja linear, a força total $\vec{F}$ será dada pela soma de todas as forças $d\vec{F}$, que atuam em cada um dos elementos de massa, isto é,

$$\vec{F} = \int d\vec{F} \quad (7.3)$$

$$= \int \frac{G \cdot m}{r^2} \cdot dM \cdot \hat{e}_r \quad (7.4)$$

Para uma distribuição volumétrica de massa, o elemento infinitesimal de massa será dado por

$$dM = \rho(r')dV' \quad (7.5)$$

assim,

$$\vec{F} = Gm \int \frac{\rho(r')dV'}{r^2} \cdot \hat{e}_r \quad (7.6)$$

Para uma distribuição superficial

$$dM = \sigma(r')dA' \quad (7.7)$$

$$\vec{F} = -Gm \int \frac{\sigma(r')dA'}{r^2} \cdot \hat{e}_r \quad (7.8)$$

Para uma distribuição linear

$$dM = \lambda(r')d\ell' \quad (7.9)$$

$$\vec{F} = -Gm \int \frac{\lambda(r')d\ell'}{r^2} \cdot \hat{e}_r \quad (7.10)$$

Caso a massa m não possa ser considerada como partícula, isto é, tenha extensão, faz-se necessária uma segunda integral sobre essa distribuição. Sendo assim,

$$\vec{F} = -G \int_V dm \cdot \int_{V'} dM \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \hat{e}_r \quad (7.11)$$

De acordo com a equação (7.4), o sistema de forças atuando em cada um dos elementos de massa dM (do corpo extenso) devido a m , gera uma força resultante $\vec{F}$ em um ponto CG atuando ao longo da linha que liga CG a posição da massa m (ponto P), cuja distância a CG é r , conforme ilustra a figura 7-3.

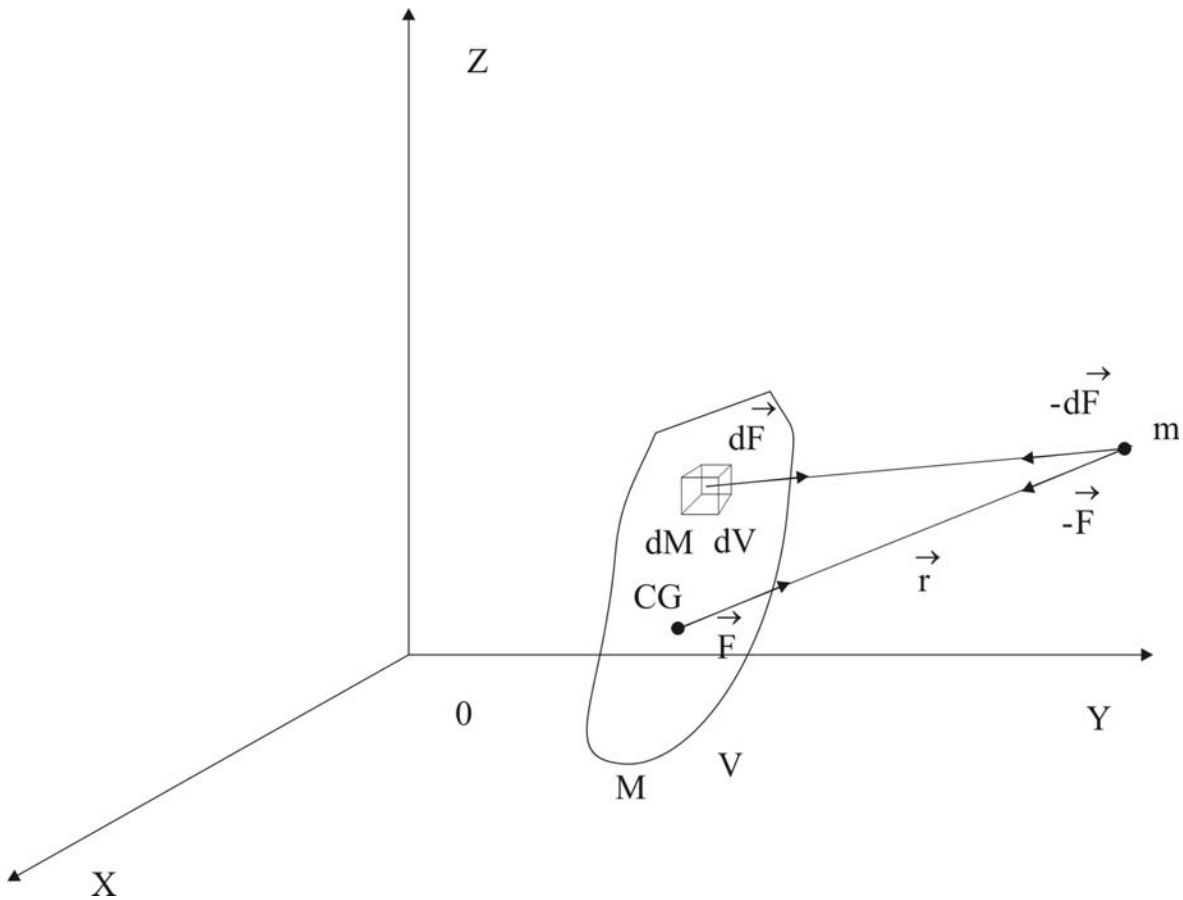


Figura 7-3

Pela 3ª Lei de Newton, a força que atua em m é igual a $-\vec{F}$. O ponto CG é escolhido de modo que a força possa ser escrita da forma

$$\vec{F} = G \frac{mM}{r^2} \hat{e}_r \quad (7.12)$$

isto é, a força gravitacional entre o corpo extenso de massa M e a partícula de massa m é equivalente a uma força atuando em M , como se este tivesse toda a sua massa concentrada em CG, daí a razão de chamar esse ponto de Centro de Gravidade.

Em geral, o Centro de Gravidade não coincide com a posição do CM (definido no capítulo 2), podendo até nem ficar na linha que liga o CM ao ponto P . O CG irá coincidir com o CM apenas quando:

- a) A distância entre as massas m e M for grande o suficiente de modo que diferentes partes de M sejam atraídas por m pela mesma força, isto é, o campo gravitacional seja uniforme;
- b) O sistema for esfericamente simétrico.

7-3 CAMPO E POTENCIAL GRAVITACIONAL

Observando as equações (7.6) e (7.12), vemos que a força de atração entre m e M é proporcional a m . Daí vem a idéia de definir uma quantidade denominada de intensidade do campo gravitacional $\vec{g}$, que não depende da massa da partícula, de massa m , que sofre a ação de uma força devido à presença da massa M , que atuaria como fonte do campo gravitacional, isto é,

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (7.13)$$

Das equações (7.12) e (7.6), teremos

$$\vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \cdot \hat{e}_r \quad (7.14)$$

ou

$$\vec{g} = -G \int \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{r^2} \cdot \hat{e}_r \quad (7.15)$$

Para distribuições superficial e linear, teremos equações análogas

$$\vec{g} = -G \int \frac{\sigma(\vec{r}') dA'}{r^2} \cdot \hat{e}_r \quad (7.16)$$

e

$$\vec{g} = -G \int \frac{\lambda(\vec{r}') d\ell'}{r^2} \cdot \hat{e}_r \quad (7.17)$$

Como $\vec{g}(\vec{r})$ varia com $\frac{1}{r^2}$, podemos definir uma função potencial Φ , tal que

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (7.18)$$

Φ é conhecido como potencial gravitacional, onde

$$\Phi = -\frac{GM}{r} + c \quad (7.19)$$

O valor de c é determinado pela condição de ser o potencial nulo quando $r \rightarrow \infty$. Sendo assim, $c = 0$ e

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \quad (7.20)$$

Para distribuições volumétricas, superficiais e lineares teremos equações análogas a (7.20)

$$\Phi = -G \int \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{r} \quad (7.21)$$

$$\Phi = -G \int \frac{\sigma(\vec{r}') dA'}{r} \quad (7.22)$$

$$\Phi = -G \int \frac{\lambda(\vec{r}') dl'}{r} \quad (7.23)$$

O significado físico do potencial é obtido quando calculamos o trabalho realizado sobre uma partícula, em um campo gravitacional, para deslocá-la entre dois pontos

$$W = - \int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (7.24)$$

Substituindo (7.13) em (7.24)

$$W = -m \int \vec{g} \cdot d\vec{r} \quad (7.25)$$

$$\frac{W}{m} = - \int \vec{g} \cdot d\vec{r} \quad (7.26)$$

Usando agora (7.18) na equação acima

$$\frac{W}{m} = \int \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} \quad (7.25)$$

$$\frac{W}{m} = \int \sum_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} \cdot dx_i \quad (7.26)$$

$$= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\Phi \quad (7.27)$$

$$= \Phi \Big|_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \quad (7.28)$$

$$\frac{W}{m} = \Phi(\vec{r}) - \Phi(\vec{r}_0) \quad (7.29)$$

A equação (7.29) nos diz que a diferença de potencial entre dois pontos é igual ao trabalho por unidade de massa para deslocarmos essa partícula entre os pontos considerados. Tomando $\vec{r}_0$ no infinito, podemos interpretar o potencial em um ponto qualquer $\vec{r}$, como o trabalho por unidade de massa para trazer a partícula do infinito até o ponto considerado, isto é,

$$\frac{W}{m} = \Phi(\vec{r}) \quad (7.30)$$

Daí a idéia de definirmos energia potencial gravitacional U como

$$U = m\Phi \quad (7.31)$$

isto é, como o sistema é conservativo, a força é dada por

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (7.32)$$

como nas abordagens anteriores.

As colocações feitas aqui possuem dois aspectos que devem ser ressaltados: a teoria do potencial e o conceito de campo.

Em relação à teoria do potencial, ganha-se a vantagem de se trabalhar com uma grandeza escalar em vez da grandeza vetorial força. Essa troca simplifica os cálculos – é mais fácil, matematicamente, trabalhar com grandezas escalares do que com grandezas vetoriais.

O conceito de campo facilita a compreensão do problema no que se refere à forma com que a interação ocorre, eliminando o problema de interação a distância, isto é, que a interação ocorra instantaneamente com velocidade infinita.

Usualmente, o problema do cálculo do potencial e do campo gravitacional de uma casca esférica (oca) de paredes finas, com densidade σ e massa M é utilizado para ilustrar alguns resultados da Teoria de Gravitação Newtoniana. Calcularemos o potencial gravitacional em um ponto P qualquer, conforme mostra a figura 7-4.

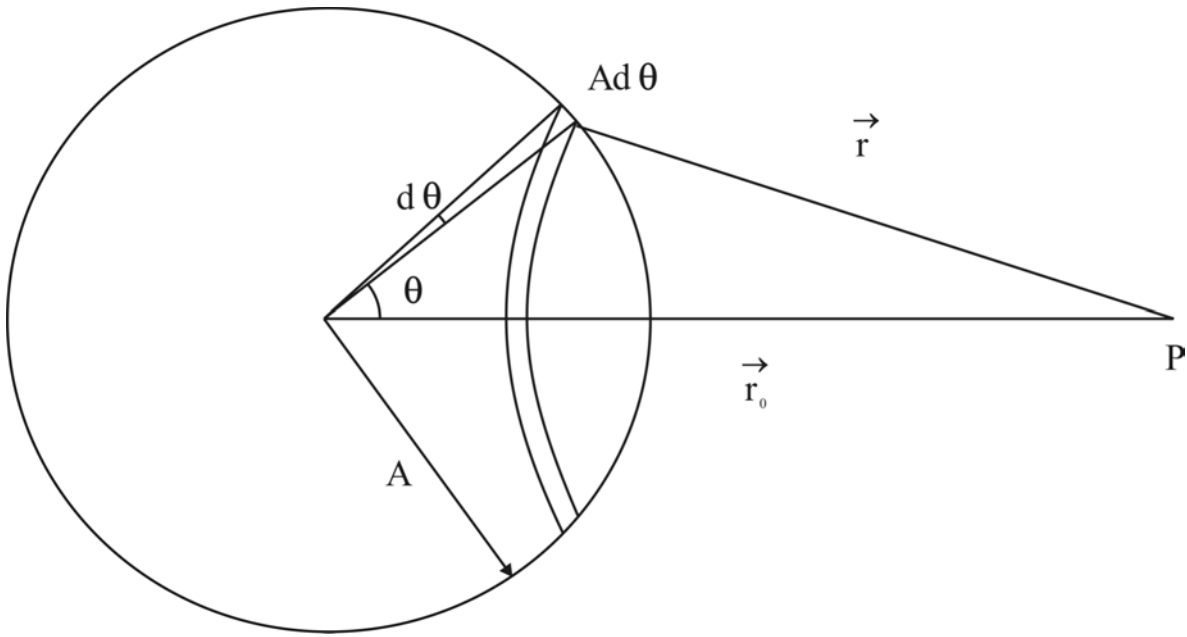


Figura 7-4

Da equação (7.22) e da figura 7-4, teremos:

$$\Phi = -G \int_0^\pi \frac{\sigma(2\pi A \sin \theta) A d\theta}{[r_0^2 + A^2 - 2Ar_0 \cos \theta]^{\frac{1}{2}}} \quad (7.33)$$

$$= -2\pi\sigma G A^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{[r_0^2 + A^2 - 2Ar_0 \cos \theta]^{\frac{1}{2}}} \quad (7.34)$$

$$= -\frac{MG}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{[r_0^2 + A^2 - 2Ar_0 \cos \theta]^{\frac{1}{2}}} \quad (7.35)$$

onde usamos que

$$\sigma = \frac{\text{Massa}}{\text{Area}} = \frac{M}{4\pi A^2} \quad (7.36)$$

Para resolvermos a integral (7.37), faremos

$$u^2 = r_0^2 + A^2 - 2Ar_0 \cos \theta \quad (7.37)$$

Derivamos a equação acima

$$2Ar_0 \sin \theta d\theta = 2u du \quad (7.38)$$

Assim,

$$\text{sen } \theta d\theta = \frac{udu}{Ar_0} \quad (7.39)$$

E a equação (7.35) tomará a forma

$$\Phi = \frac{-MG}{2Ar_0} \int_{|r_0-A|}^{(r_0+A)} \frac{udu}{[u^2]^{1/2}} \quad (7.40)$$

$$= -\frac{MG}{2Ar_0} \int_{|r_0-A|}^{(r_0+A)} du \quad (7.41)$$

$$= -\frac{MG}{2Ar_0} u \Big|_{|r_0-A|}^{(r_0+A)} \quad (7.42)$$

Se o ponto P estiver fora da casca ($r_0 > A$)

$$\Phi = -\frac{MG}{2Ar_0} [(r_0 + A) - (r_0 - A)] \quad (7.43)$$

$$= -\frac{MG}{2Ar_0} 2A \quad (7.44)$$

$$= -\frac{MG}{r_0} \quad (7.45)$$

isto é, fora da casca esférica o potencial é o mesmo que o de uma partícula de massa igual à massa da casca esférica localizada em seu centro.

Se o ponto P estiver dentro da casca, $r_0 < A$, teremos

$$\Phi = -\frac{MG}{2Ar_0} [(r_0 + A) - (A - r_0)] \quad (7.46)$$

$$= -\frac{MG}{2r_0 A} [2r_0] \quad (7.47)$$

$$= -\frac{MG}{A} \quad (7.48)$$

que nos diz que o potencial no interior da casca é constante.

O gráfico da figura 7-5 mostra como o potencial varia com r_0 . Utilizamos os valores de $A=1$ e $MG=1$.

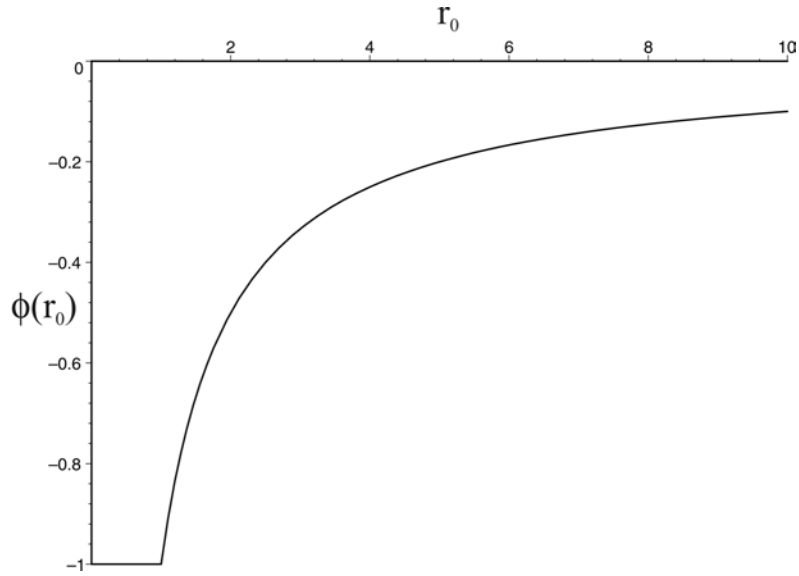


Figura 7-5

Utilizando a equação (7.18) podemos calcular a intensidade do campo gravitacional

$\vec{g}$

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (7.18)$$

Para $r_0 > A$, de (7.18) e (7.45)

$$\vec{g} = -\frac{d\Phi}{dr_0} \hat{e}_{r_0} \quad (7.45)$$

$$= -\frac{d}{dr_0} \left(\frac{MG}{r_0} \right) \hat{e}_{r_0} \quad (7.49)$$

$$= \frac{MG}{r_0^2} \hat{e}_{r_0} \quad (7.50)$$

Para $r_0 < A$, de (7.18) e (7.48)

$$\vec{g} = 0 \quad (7.51)$$

pois o potencial é constante. Mostramos na Figura 7-6 o gráfico de $\vec{g}$ em função de r_0 , onde utilizamos $MG=1$.

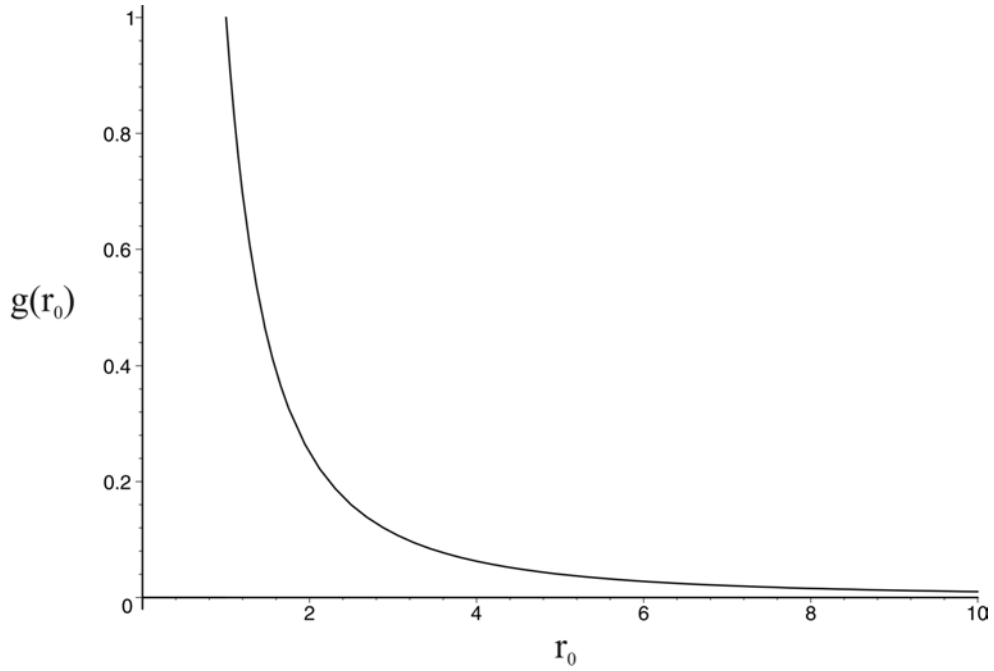


Figura 7-6

A solução deste problema justifica porque Newton podia considerar os objetos como partículas com massa igual a massa total do objeto localizada em seu centro. Devemos observar que o próprio Newton teve que desenvolver o cálculo necessário a essa demonstração.

7.4 AS EQUAÇÕES DOS CAMPOS GRAVITACIONAIS

Sabemos que

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi \quad (7.18)$$

Como o rotacional do gradiente é sempre nulo

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0 \quad (7.52)$$

então

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0 \quad (7.53)$$

Em coordenadas cartesianas, teremos

$$\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z} = 0 \quad (7.54)$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x} = 0 \quad (7.55)$$

$$\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} = 0 \quad (7.56)$$

Essas equações são satisfeitas para qualquer campo gravitacional. Entretanto não serve para calcularmos $\vec{g}$. Para isso, devemos relacionar $\vec{g}$ com a distribuição de matéria, via conceito de campo.

Seja m uma massa puntiforme contida no interior de um volume V , conforme mostra a figura 7-7.

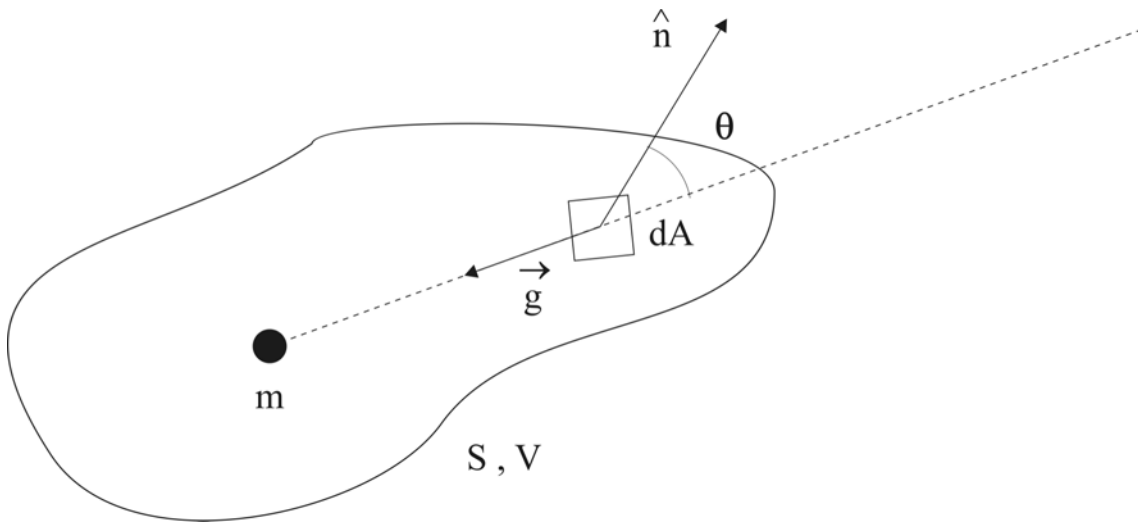


Figura 7-7

O fluxo de $\vec{g}$ através da superfície (S) que limita V é dado por

$$\Phi_m = -\int \hat{n} \cdot \vec{g} dA \quad (7.57)$$

Substituindo o valor de $\vec{g}$ [equação (7.14)] em (7.57),

$$\Phi_m = -Gm \int \frac{\cos \theta}{r^2} dA \quad (7.58)$$

Observando que o valor do integrando representa o ângulo sólido elementar, cuja integral dá o valor de 4π

$$\Phi_m = -Gm4\pi \quad (7.59)$$

$$\Phi_m = -4\pi Gm \quad (7.60)$$

Na equação acima, m representa uma massa no interior da superfície S.

Para uma distribuição discreta de n massas, teremos

$$\Phi_m = -4\pi G \sum_{i=1}^n m_i \quad (7.61)$$

Para distribuições volumétricas, superficiais e lineares, teremos equações análogas

$$\Phi_m = -4\pi G \int \rho dV \quad (7.62)$$

$$\Phi_m = -4\pi G \int \sigma dA \quad (7.63)$$

$$\Phi_m = -4\pi G \int \lambda d\ell \quad (7.64)$$

Das equações (7.57) e (7.62), podemos relacionar $\vec{g}$ com a distribuição de massa

$$\int \hat{n} \cdot \vec{g} dA = -4\pi G \int \rho dV \quad (7.65)$$

Essa equação é conhecida como Lei de Gauss para a gravitação. Aplicando o Teorema da Divergência do lado esquerdo da equação (7.65)

$$\int \hat{n} \cdot \vec{g} dA = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) dV \quad (7.66)$$

Assim,

$$\int (\vec{\nabla} \cdot \vec{g}) dV = -4\pi G \int \rho dV \quad (7.67)$$

$$\int (\vec{\nabla} \cdot \vec{g} + 4\pi G \rho) dV = 0 \quad (7.68)$$

Como a equação (7.68) é válida para qualquer volume V ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} + 4\pi G \rho = 0 \quad (7.69)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho \quad (7.70)$$

Conhecida a distribuição de massa ρ , podemos determinar univocamente o valor de $\vec{g}$ com a condição de que $\vec{g} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. Essa equação nos diz, também, que a fonte do campo é a distribuição da massa.

Como

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} \Phi \quad (7.18)$$

usando (7.70)

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \Phi) = -4\pi G \rho \quad (7.71)$$

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (7.72)$$

que determina o potencial de forma unívoca, se considerarmos que $\Phi \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. Da forma como está escrita, a equação (7.72) é conhecida como Equação de Poisson.

Quando a distribuição de massa é nula, isto é, na ausência de matéria, teremos

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 0 \tag{7.73}$$

que é conhecida como Equação de Laplace.

As equações de Poisson e Laplace são tão importantes na Física que merecem estudo detalhado na disciplina Física Matemática I.

COLISÕES ENTRE PARTÍCULAS

8-1 INTRODUÇÃO

Consideremos um sistema de duas partículas em que uma é lançada contra a outra. Durante a interação entre estas pode haver troca de energia e momento, produzindo após o “choque” uma única partícula (iguais ou diferentes das iniciais), ou mais de duas partículas. Denominamos esse processo de colisão, que se constitui na principal técnica experimental utilizada na área de Física das Partículas Elementares.

Quando estudamos a interação entre duas partículas, conhecida a força (ou o potencial de interação) o problema é solúvel. Caso a força não seja conhecida, sabendo as condições iniciais e a configuração final do sistema, podemos usar as Leis de Conservação (de Energia, de Momento, de Carga, etc.) para inferir a interação ocorrida durante o processo de colisão. Mesmo quando a configuração final não é totalmente conhecida, alguns resultados importantes podem ser obtidos. Historicamente, o desenvolvimento da Teoria de Colisões precedeu as Leis de Newton.

Neste capítulo abordaremos os problemas de colisões dentro do âmbito da Mecânica Clássica, estudando as colisões elásticas e inelásticas de partículas tanto no referencial do Laboratório (LAB), quanto no referencial do Centro de Massa (CM). Dando continuidade, introduziremos o cálculo da seção de choque, trabalhando o problema do espalhamento por uma força central do tipo $1/r^2$, apresentando o clássico resultado obtido por Rutherford. Baseado nesses resultados, Rutherford propôs o modelo atômico planetário. Devemos observar que o mesmo resultado dado pela Mecânica Clássica é obtido quando se usa a Mecânica Quântica, tornando essa experiência fundamental para o desenvolvimento da Teoria Quântica.

8-2 COLISÕES UNIDIMENSIONAIS E O COEFICIENTE DE RESTITUIÇÃO

Quando durante uma colisão há conservação de energia cinética, dizemos que esta é uma colisão elástica. Caso contrário, dizemos que a colisão é inelástica; em ambos os casos há conservação de momento, desde que as forças que atuam no sistema sejam forças internas.

Consideremos uma colisão onde há impacto direto entre duas partículas de massas m_1 e m_2 , que possuem velocidades iniciais $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, e que, após a colisão, tenham velocidades $\vec{v}'_1$ e $\vec{v}'_2$, respectivamente, conforme mostra a figura 8-1.

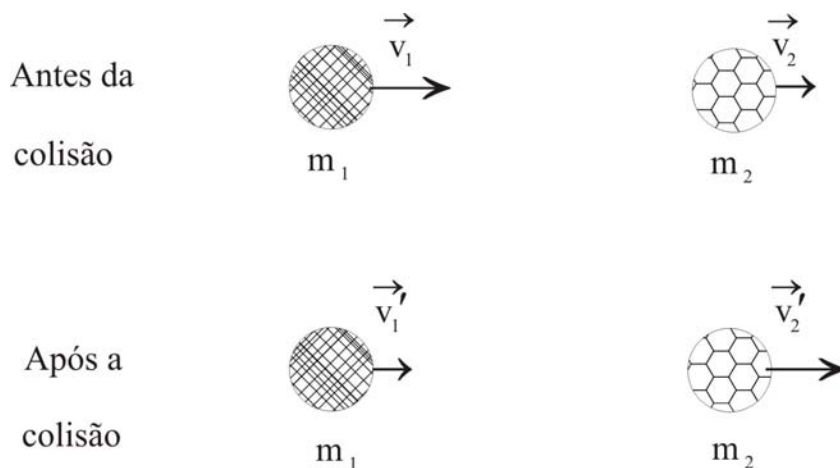


Figura 8-1

Devido à Conservação do Momento teremos que

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad (8.1)$$

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 \quad (8.2)$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad (8.3)$$

Durante o impacto, haverá uma deformação elástica por um certo tempo, denominado de período de deformação, em que parte da energia cinética será transformada em energia potencial elástica. Após atingir a deformação máxima, a energia potencial elástica é restituída ao sistema sob a forma de energia cinética em um tempo denominado de tempo de restituição. A Figura 8-2 ilustra esse processo.

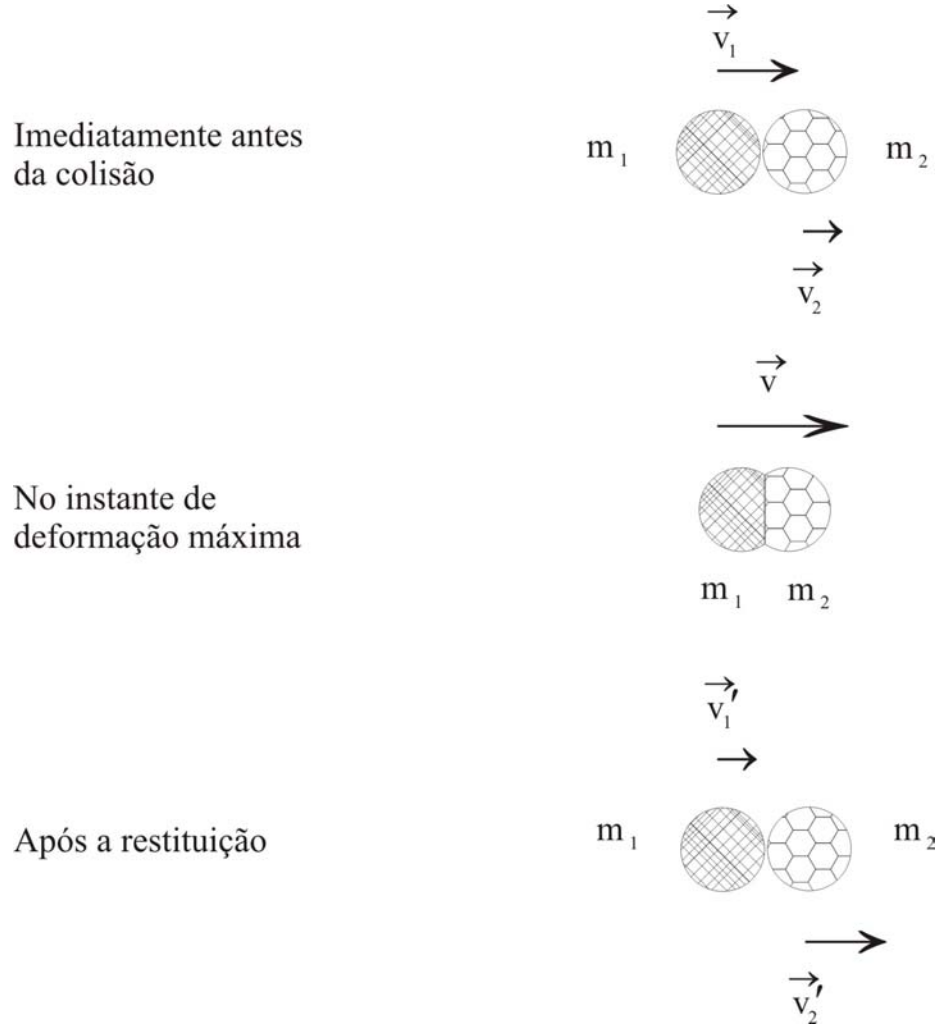


Figura 8-2

O impulso que atua na partícula de massa m_1 durante a deformação é dado por

$$\vec{I}_{D1} = \Delta \vec{P}_1 \quad (8.4)$$

$$\vec{I}_{D1} = m_1 \vec{v} - m_1 \vec{v}_1 \quad (8.5)$$

Para a partícula de massa m_2

$$\vec{I}_{D2} = m_2 \vec{v} - m_2 \vec{v}_2 \quad (8.6)$$

Devemos observar que pelo princípio de ação-reação

$$\vec{I}_{D2} = -\vec{I}_{D1} \quad (8.7)$$

Resolvendo a equação (8.5) para $\vec{v}_1$,

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v} - \vec{I}_{D1} \quad (8.8)$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v} - \frac{\vec{I}_{D1}}{m_1} \quad (8.9)$$

Equação análoga é obtida de (8.6) para $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \frac{\vec{I}_{D2}}{m_2} \quad (8.10)$$

Usando (8.7) em (8.10),

$$\vec{v}_2 = \vec{v} + \frac{\vec{I}_{D1}}{m_2} \quad (8.11)$$

Subtraindo (8.11) de (8.9),

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{I}_{D1} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \quad (8.12)$$

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) \cdot \vec{I}_{D1} \quad (8.13)$$

Procedendo de forma análoga para o cálculo do impulso durante a restituição, teremos para a partícula 1

$$\vec{I}_{R1} = m_1 \vec{v}'_1 - m_1 \vec{v} \quad (8.14)$$

Para a partícula 2

$$\vec{I}_{R2} = m_2 \vec{v}'_2 - m_2 \vec{v} \quad (8.15)$$

$$= -\vec{I}_{R1} \quad (8.16)$$

Resolvendo (8.14) e (8.15) para $\vec{v}'_1$ e $\vec{v}'_2$, respectivamente, teremos

$$\vec{v}'_1 = \vec{v} + \frac{\vec{I}_{R1}}{m_1} \quad (8.17)$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v} + \frac{\vec{I}_{R2}}{m_2} \quad (8.18)$$

Considerando a equação (8.16), as duas equações anteriores podem ser escritas da forma

$$\vec{v}'_1 = \vec{v} + \frac{\vec{I}_{R1}}{m_1} \quad (8.19)$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v} - \frac{\vec{I}_{R1}}{m_2} \quad (8.20)$$

Subtraindo (8.20) de (8.19),

$$\begin{aligned}
\vec{v}_2' - \vec{v}_1' &= -\vec{I}_{R1} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \\
&= - \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) \cdot \vec{I}_{R1}
\end{aligned} \tag{8.21}$$

Para o caso em análise (unidimensional), podemos escrever as equações (8.13) e (8.21) em módulo

$$|\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) |\vec{I}_{D1}| \tag{8.22}$$

$$|\vec{v}_2' - \vec{v}_1'| = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) |\vec{I}_{R1}| \tag{8.23}$$

Dividindo (8.23) por (8.22)

$$\frac{|\vec{v}_2' - \vec{v}_1'|}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|} = \frac{|\vec{I}_{R1}|}{|\vec{I}_{D1}|} \tag{8.24}$$

A relação entre os impulsos de restituição e deformação depende do material, velocidade, etc. Sendo assim, define-se uma nova grandeza e denominada de coeficiente de restituição como sendo a razão entre os impulsos de restituição e de deformação

$$e = \frac{|\vec{I}_{R1}|}{|\vec{I}_{D1}|} \tag{8.25}$$

de modo que (8.24) poderá ser escrita como

$$e = \frac{|\vec{v}_2' - \vec{v}_1'|}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|} \tag{8.26}$$

Observando a equação (8.26) verificamos que o coeficiente de restituição é a razão do módulo da velocidade de separação entre as partículas após o choque pelo módulo da velocidade de aproximação antes do choque. Essa equação é conhecida como Regra de Newton.

Em se tratando de colisões oblíquas (bidimensionais), como ilustrada na Figura 8-3, a regra de Newton é válida apenas em relação às componentes de velocidade ao longo do eixo-y.

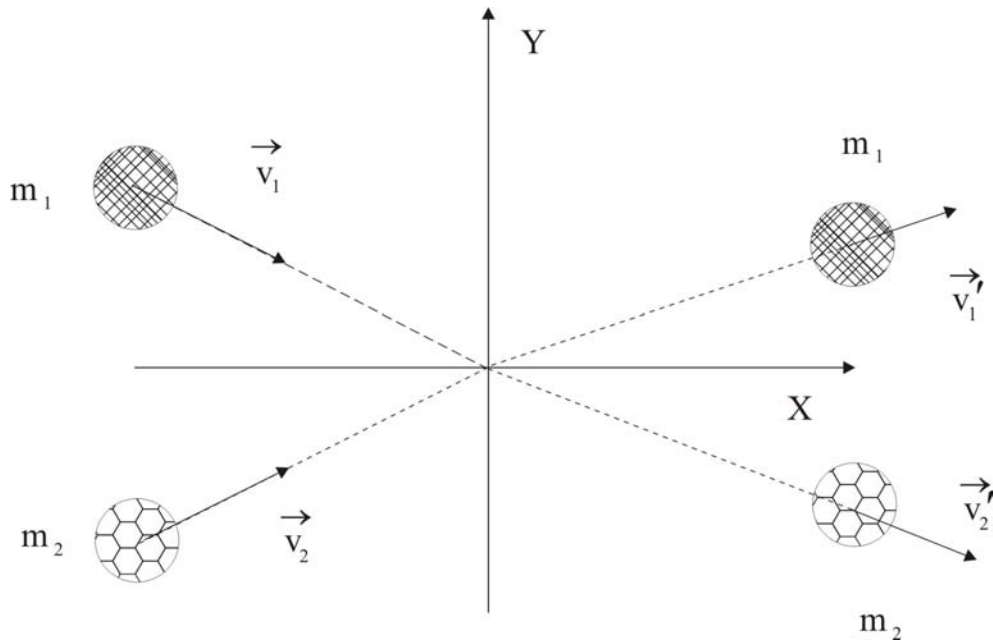


Figura 8-3

Para entendermos o significado físico do coeficiente de restituição, é interessante analisarmos uma colisão unidimensional elástica como a representada na Figura 8-1. Pela conservação da energia cinética,

$$T_i = T_f \quad (8.27)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (8.28)$$

Colocando os termos, referente a cada uma das partículas, no mesmo lado da equação, teremos

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \quad (8.29)$$

Expandindo os produtos notáveis

$$m_1 (v_1 + v_1')(v_1 - v_1') = m_2 (v_2' + v_2)(v_2' - v_2) \quad (8.30)$$

Da equação (8.3), temos que

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Colocando os termos referentes a cada uma das partículas do mesmo lado da equação, teremos

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \quad (8.31)$$

Dividindo a equação (8.30) pela equação (8.31)

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \quad (8.32)$$

$$v'_2 - v'_1 = v_1 - v_2 \quad (8.33)$$

$$\frac{|v'_2 - v'_1|}{|v_2 - v_1|} = 1 \quad (8.34)$$

isto é, para colisões elásticas, o coeficiente de restituição é igual a 1. Poderíamos ter chegado a essa mesma conclusão analisando a definição do coeficiente de restituição, equação (8.25); caso a razão entre os impulsos de restituição e deformação seja igual a 1, teremos conservação de energia cinética. Para $e < 1$, temos perda de energia cinética, isto é, a colisão é inelástica.

De forma genérica, podemos escrever a conservação de energia cinética da forma

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + Q \quad (8.35)$$

onde o fator Q representa o ganho ou a perda de energia durante a colisão. Para $Q > 0$, teremos perda de energia cinética (colisão exoenergética); para $Q = 0$, teremos conservação de energia cinética (colisão elástica); e para $Q < 0$, teremos ganho de energia cinética (colisão endoenergética). Em geral, as colisões macroscópicas são inelásticas (endoenergéticas).

8-3 COLISÕES BIDIMENSIONAIS ELÁSTICAS E OS REFERENCIAIS DO LAB E DO CM

Dentro do ponto de vista prático, as medidas experimentais são feitas no laboratório, isto é, o laboratório é utilizado como sistema de referência (LAB). Entretanto, em experiências de colisões, apenas forças internas atuam no sistema, tornando o problema mais simples quando analisado do referencial do CM. Nessa perspectiva, mostraremos como o problema é visto nos dois referenciais, bem como passar de um para outro.

Convencionaremos que u_i é a velocidade da partícula i no referencial do LAB antes da colisão; no referencial do CM essa velocidade será u'_i . Após a colisão, a velocidade da partícula i no referencial do LAB será v_i ; no referencial do CM será v'_i . O ângulo de espalhamento da partícula 1 antes da colisão será θ_i ; para a partícula 2 será ϕ_i . O ângulo de espalhamento da partícula 1 após a colisão, quando visto do referencial do CM será θ , para a partícula 2 será ϕ . A velocidade do CM do sistema será denotada por v .

Utilizando a notação precedente, abordaremos a colisão de uma partícula de massa m_1 e velocidade u_1 com uma outra partícula em repouso (alvo) de massa m_2 . A figura 8-4 ilustra o problema antes da colisão quando visto do referencial do LAB.

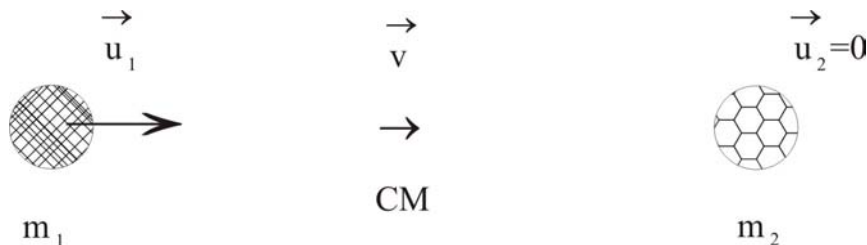


Figura 8-4

Quando visto do referencial do CM, veremos o problema como mostra a figura 8-5.



Figura 8-5

A figura 8-6 ilustra o problema após a colisão entre as partículas quando visto do referencial do LAB.

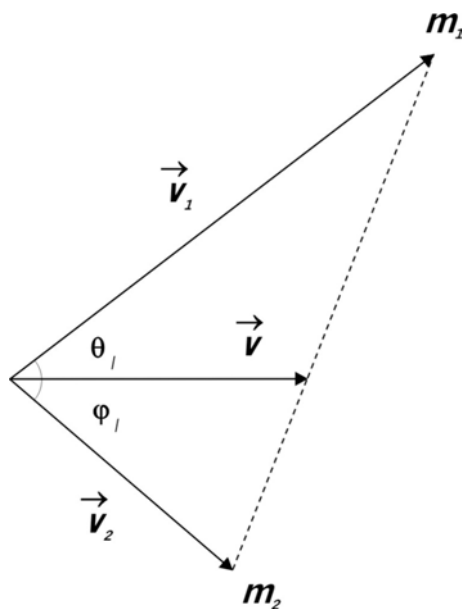


Figura 8-6

No referencial do CM, veremos o problema como mostra a figura 8-7.

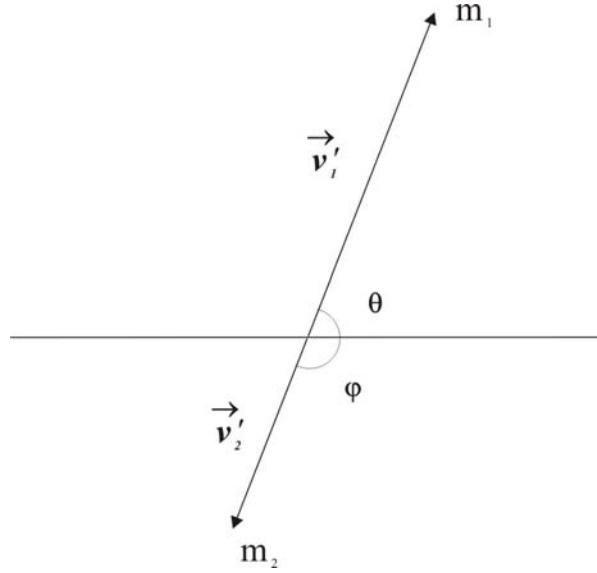


Figura 8-7

Observando as figuras 8-5 e 8-7, vemos que o movimento antes e depois da colisão é colinear, quando visto do referencial do CM.

Da equação (6.5) temos que o CM é dado por

$$\vec{R} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \quad (8.36)$$

em que

$$M = m_1 + m_2 \quad (8.37)$$

Derivando (8.36) em relação ao tempo, teremos que a velocidade do CM será

$$\vec{v} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2) \quad (8.38)$$

Como $\vec{u}_2 = 0$ no problema em questão

$$\vec{v} = \frac{m_1}{M} \vec{u}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{u}_1 \quad (8.39)$$

Como m_2 está em repouso no referencial do LAB, sua velocidade no sistema de referencial do CM será igual a menos a velocidade do CM, isto é,

$$\vec{u}_2' = -\vec{v} \quad (8.40)$$

$$\vec{u}_2' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{u}_1 \quad (8.41)$$

Aplicando o Princípio de Conservação do Momento em relação ao CM, antes da colisão,

$$m_1 \vec{u}_1' + m_2 \vec{u}_2' = 0 \quad (8.42)$$

Após a colisão, teremos

$$m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = 0 \quad (8.43)$$

Resolvendo (8.42) para $\vec{u}'_1$,

$$\vec{u}'_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{u}'_2 \quad (8.44)$$

Substituindo (8.41) em (8.44),

$$\vec{u}'_1 = \frac{-m_2}{m_1} \left(\frac{-m_1}{m_1 + m_2} \right) \vec{u}_1 \quad (8.45)$$

$$\vec{u}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{u}_1 \quad (8.46)$$

Para escrevermos $\vec{u}_1$ em função de $\vec{v}$ basta resolvermos as equações (8.40) e (8.41) para $\vec{u}_1$

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{u}_1 = \vec{v} \quad (8.47)$$

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \vec{v} \quad (8.48)$$

Para escrevermos $\vec{u}'_1$ em função de $\vec{v}$, basta substituírmos (8.48) em (8.46)

$$\vec{u}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \vec{v} \quad (8.49)$$

$$\vec{u}'_1 = \frac{m_2}{m_1} \vec{v} \quad (8.50)$$

As equações (8.41) e (8.46) nos mostram como as velocidades das partículas 1 e 2, no referencial do CM, estão relacionadas com a velocidade da partícula 1, no referencial do LAB, antes da colisão. Procuraremos equações análogas para o problema após a colisão.

Pelo Teorema de Conservação de Energia, temos que

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (8.51)$$

$$m_1 u_1'^2 + m_2 u_2'^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \quad (8.52)$$

Resolvendo (8.42) para $\vec{u}'_2$

$$\vec{u}'_2 = \frac{-m_1}{m_2} \vec{u}'_1 \quad (8.53)$$

Resolvendo (8.43) para $\vec{v}'_2$

$$\vec{v}'_2 = \frac{-m_1}{m_2} \vec{v}'_1 \quad (8.54)$$

Substituindo (8.53) e (8.54) em (8.52)

$$m_1 u_1'^2 + m_2 \left(\frac{-m_1}{m_2} u_1' \right)^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 \left(\frac{-m_1}{m_2} v_1' \right)^2 \quad (8.55)$$

$$m_1 u_1'^2 + \frac{m_1^2}{m_2} u_1'^2 = m_1 v_1'^2 + \frac{m_1^2}{m_2} v_1'^2$$

$$u_1'^2 \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right) = v_1'^2 \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right)$$

$$u_1'^2 = v_1'^2 \quad (8.56)$$

isto é,

$$u_1' = v_1' \quad (8.57)$$

De (8.46) e (8.57)

$$v_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_1 \quad (8.58)$$

Tomando o módulo de (8.54), teremos

$$v_2' = \frac{m_1}{m_2} v_1' \quad (8.54)$$

Substituindo o valor de v_1' , dado pela equação (8.58),

$$v_2' = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) u_1 \quad (8.59)$$

$$v_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1 \quad (8.60)$$

Comparando a equação (8.60) com o módulo da equação (8.41), vemos que

$$v_2' = u_2' \quad (8.61)$$

Das equações (8.57) e (8.61), vemos que o módulo das velocidades das partículas não muda quando observadas do referencial do CM.

Seja $\hat{n}$ o vetor unitário na direção da velocidade de m_1 após a colisão. Da equação (8.58), teremos

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_1 \hat{n} \quad (8.62)$$

A velocidade da partícula m_2 após a colisão [equação (8.60)], poderá ser escrita vetorialmente da forma

$$\vec{v}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1 (-\hat{n}) \quad (8.63)$$

$$\vec{v}'_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} u_1 \hat{n} \quad (8.64)$$

A transposição do referencial do LAB para o referencial do CM pode ser feita observando-se as figuras 8-6 e 8-7. Para a partícula de massa m_1

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v}'_1 \quad (8.65)$$

Substituindo (8.39) e (8.62) em (8.65),

$$\vec{v}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{u}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_1 \hat{n} \quad (8.66)$$

Para a partícula de massa m_2 ,

$$\vec{v}_2 = \vec{v} + \vec{v}'_2 \quad (8.67)$$

Substituindo (8.39) e (8.64) em (8.67),

$$\vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{u}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1 \hat{n} \quad (8.68)$$

Detalharemos agora o movimento de cada uma das partículas nos referenciais do LAB e do CM.

O espalhamento da partícula de massa m_1 deve ser analisado quando $\vec{v} < \vec{v}'_1$ e quando $\vec{v} > \vec{v}'_1$, separadamente. Quando $\vec{v} < \vec{v}'_1$, teremos a possibilidade ilustrada na figura 8-8. Entretanto, quando $\vec{v} > \vec{v}'_1$, teremos possibilidade de espalhamento para frente e para trás, isto é, para cada valor de $\vec{v}$ e $\vec{v}'_1$, teremos dois valores possíveis para $\vec{v}'_1$, conforme mostra a figura 8-9. Os índices f e b são utilizados para indicar espalhamento para frente e para trás, respectivamente. Como experimentalmente medimos θ_i e não $\vec{v}_1$, para um único valor de θ_i teremos dois valores possíveis para θ (θ_f e θ_b). Conhecidos $\vec{v}_1$ e $\vec{v}'_1$, o problema fica inteiramente especificado. Entretanto o conhecimento de $\vec{v}$ e do ângulo θ_i (ângulo que $\vec{v}_1$ faz com $\vec{v}$) permite dois valores possíveis para $\vec{v}_1$ ($\vec{v}_{1f}$ e $\vec{v}_{1b}$), uma vez que seu módulo não é conhecido.

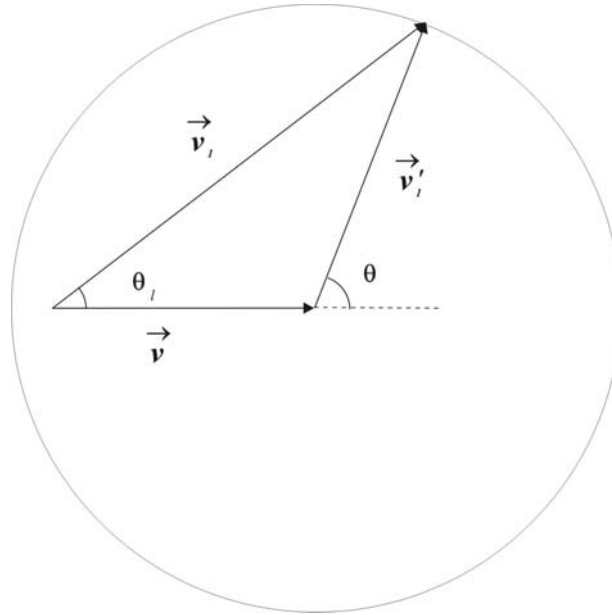


Figura 8-8

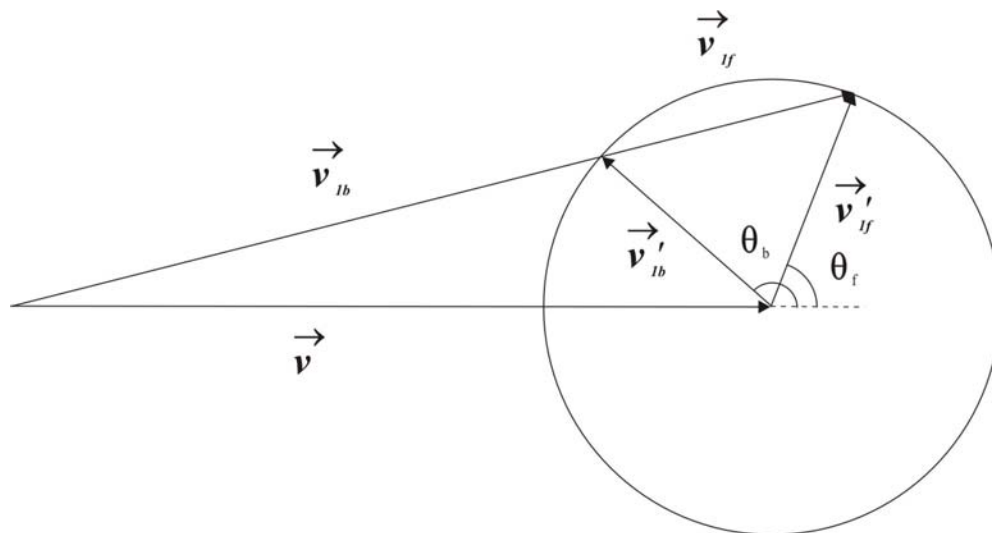


Figura 8-9

A relação entre θ_i e θ é obtida pela figura 8-8

$$v'_1 \sin \theta = v_1 \sin \theta_i \quad (8.69)$$

$$v'_1 \cos \theta + v = v_1 \cos \theta_i \quad (8.70)$$

Dividindo-se (8.69) por (8.70),

$$\operatorname{tg} \theta_i = \frac{v'_1 \sin \theta}{v'_1 \cos \theta + v} \quad (8.71)$$

$$\operatorname{tg} \theta_l = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + v / v_1'} \quad (8.72)$$

Dividindo-se o módulo da equação (8.39) pela equação (8.58)

$$v = \frac{m_1}{M} u_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1 \quad (8.39)$$

$$v_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_1 \quad (8.58)$$

teremos,

$$\frac{v}{v_1'} = \frac{m_1}{m_2} \quad (8.73)$$

Substituindo (8.73) em (8.72),

$$\operatorname{tg} \theta_l = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + m_1 / m_2} \quad (8.74)$$

que nos dá a relação entre o ângulo de espalhamento no referencial do LAB em função do ângulo de espalhamento no referencial do CM.

Vejamos agora como tratar casos especiais da equação (8.74). Para

$$m_1 / m_2 \ll 1 \quad (8.75)$$

teremos

$$\operatorname{tg} \theta_l \approx \operatorname{tg} \theta \quad (8.76)$$

$$\theta_l \approx \theta \quad (8.77)$$

isto é, m_2 atua como um centro espalhador fixo.

Quando $m_1 = m_2$, teremos

$$\operatorname{tg} \theta_l = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + 1} \quad (8.78)$$

$$\operatorname{tg} \theta_l = \operatorname{tg}(\theta / 2) \quad (8.79)$$

$$\theta_l = \theta / 2 \quad (8.80)$$

Quando $v < v_2'$, o ângulo θ_l varia de 0 a π . Sendo assim, para $m_1 = m_2$, o valor máximo do ângulo de espalhamento no referencial do LAB é $\pi / 2$.

Quando $v > v_1'$, o ângulo θ_l varia de 0 a um certo valor máximo, retornando a zero. O valor máximo θ_l de ocorre quando v_1' e v_1 são perpendiculares, conforme mostra a figura 8-10.

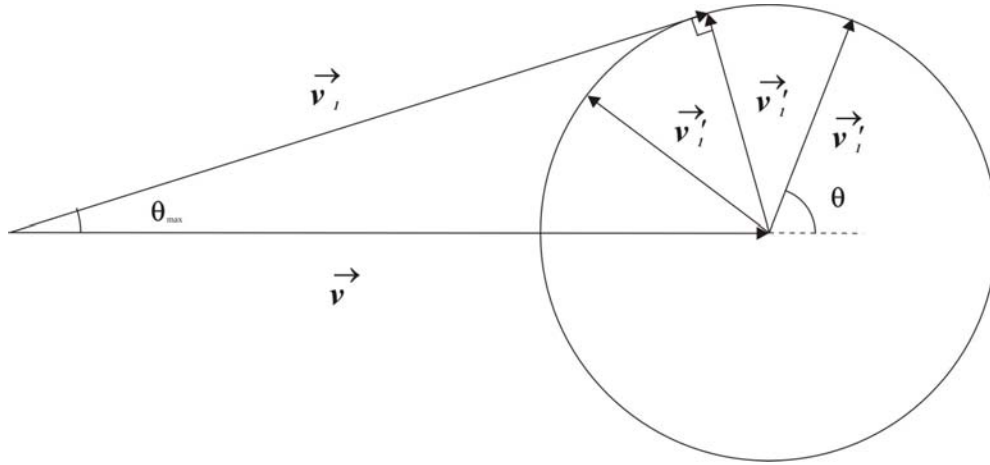


Figura 8-10

Para $\theta = \theta_{\max}$, teremos

$$\text{sen} \theta_{\max} = \frac{v_1'}{v} \quad (8.81)$$

Pela equação (8.73), (8.81) pode ser escrita da forma

$$\text{sen} \theta_{\max} = \frac{m_2}{m_1} \quad (8.82)$$

$$\theta_{\max} = \arcsen \left(\frac{m_2}{m_1} \right) \quad (8.83)$$

O ângulo de espalhamento no referencial do CM poderá variar de 0 a π .

Para a partícula de massa m_2 , observando as figuras 8-6 e 8-7, teremos o diagrama de espalhamento dessa partícula como mostra a figura 8-11.

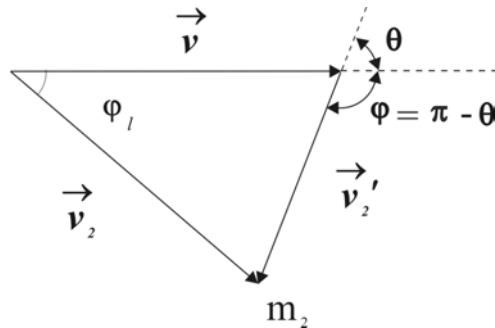


Figura 8-11

Decompondo as velocidades, teremos

$$v_2 \sin \varphi_l = v_2' \sin \theta \quad (8.84)$$

$$v_2 \cos \varphi_l = v - v_2' \cos \theta \quad (8.85)$$

Dividindo (8.84) por (8.85),

$$\tan \varphi_l = \frac{v_2' \sin \theta}{v - v_2' \cos \theta} \quad (8.86)$$

$$\tan \varphi_l = \frac{\sin \theta}{v/v_2' - \cos \theta} \quad (8.87)$$

Das equações (8.60) e (8.39), vemos que

$$\frac{v}{v_2'} = 1 \quad (8.88)$$

Substituindo (8.88) em (8.87),

$$\tan \varphi_l = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad (8.89)$$

$$\tan \varphi_l = \cotg(\theta / 2) \quad (8.90)$$

$$\tan \varphi_l = \tan(\pi / 2 - \theta / 2) \quad (8.91)$$

Assim,

$$\varphi_l = \pi / 2 - \theta / 2 \quad (8.92)$$

Que relaciona os ângulos de espalhamento da partícula 2 no referencial do LAB com o do referencial do CM. Caso $m_1 = m_2$, pela equação (8.80),

$$\theta = 2\theta_l \quad (8.93)$$

Substituindo (8.93) em (8.92),

$$\varphi_l = \pi / 2 - \theta_l \quad (8.94)$$

$$\varphi_l + \theta_l = \pi / 2 \quad (8.95)$$

isto é, para partículas de massas iguais, as velocidade ($\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$) após a colisão, no referencial do LAB, são perpendiculares.

Veremos agora como as energias, em relação aos referenciais do LAB e do CM, estão relacionadas. Usaremos a seguinte convenção:

- T_0 é a energia cinética total antes da colisão, em relação ao referencial do LAB;

- T_0' é a energia cinética total antes da colisão, em relação ao referencial do CM;
- $T_{1(2)}$ é a energia cinética da partícula de massa $m_{1(2)}$ após a colisão no referencial do LAB;
- $T_{1(2)}'$ é a energia cinética da partícula de massa $m_{1(2)}$ após a colisão, no referencial do CM.

Usando esta convenção,

$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \quad (8.96)$$

$$T_0' = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 \quad (8.97)$$

Substituindo os valores de u_1' , dado pela equação (8.46), e de u_2' , dado pela equação (8.41), podemos escrever a equação (8.97) da forma

$$T_0' = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2 u_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{-m_1 u_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \quad (8.98)$$

$$T_0' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2 u_1^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_1^2 u_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \quad (8.99)$$

$$T_0' = \frac{1}{2} m_1 m_2 u_1^2 \frac{(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2} \quad (8.100)$$

$$T_0' = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) u_1^2 \quad (8.101)$$

Observando as equações (8.101) e (8.96), vemos que

$$T_0' = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) T_0 \quad (8.102)$$

isto é, a energia total antes da colisão, no referencial do CM é apenas parte da energia cinética total antes da colisão no referencial do LAB.

Procuraremos agora relações entre $T_{1(2)}'$ e T_0 . Sabemos que

$$T_1' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \quad (8.103)$$

Substituindo (8.58) em (8.103),

$$T_1' = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2 u_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \quad (8.104)$$

$$T_1' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} u_1^2 \quad (8.105)$$

$$T_1' = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \quad (8.106)$$

Das equações (8.96) e (8.106),

$$T_1' = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 T_0 \quad (8.107)$$

Para a partícula 2, teremos

$$T_2' = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (8.108)$$

Tomando o valor de v_2' da equação (8.60),

$$T_2' = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \quad (8.109)$$

$$T_2' = \frac{1}{2} \frac{m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} u_1^2 \quad (8.110)$$

$$T_2' = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \left[\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right] \quad (8.111)$$

Da equação (8.96), a equação anterior, pode ser escrita da forma

$$T_2' = \left[\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right] T_0 \quad (8.112)$$

Relacionaremos agora as energias cinéticas e os ângulos de espalhamento.

Sabemos que

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad (8.113)$$

Dividindo a equação (8.113) pela equação (8.96),

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{v_1^2}{u_1^2} \quad (8.114)$$

Da equação (8.65), temos

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v}_1' \quad (8.65)$$

Resolvendo para $\vec{v}_1'$

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v} \quad (8.115)$$

Pela lei dos cossenos,

$$\vec{v}_1'^2 = v_1^2 + v^2 - 2v_1v \cos \theta_l \quad (8.116)$$

$$v_1^2 = v_1'^2 - v^2 + 2v_1v \cos \theta_l \quad (8.117)$$

Dividindo a Equação (8.117) por u_1^2 ,

$$\frac{v_1^2}{u_1^2} = \frac{v_1'^2}{u_1^2} - \frac{v^2}{u_1^2} + 2 \frac{v_1v}{u_1^2} \cos \theta_l \quad (8.118)$$

Da equação (8.58)

$$\frac{v_1'}{u_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (8.119)$$

Da equação (8.48)

$$\frac{v}{u_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (8.120)$$

Da equação (8.69)

$$v_1 = v_1' \frac{\sin \theta}{\sin \theta_l} \quad (8.121)$$

Vejamos como podemos escrever o 3º termo do 2º membro da equação (8.118),

$$2 \frac{v_1v}{u_1^2} \cos \theta_l = 2 \frac{v_1}{u_1} \frac{v}{u_1} \cos \theta_l \quad (8.122)$$

Substituindo as equações (8.121) e (8.120) em (8.122)

$$2 \frac{v_1v}{u_1^2} \cos \theta_l = 2 \frac{v_1'}{u_1} \frac{\sin \theta}{\sin \theta_l} \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \theta_l \quad (8.123)$$

Das equações (8.119) e (8.123),

$$2 \frac{v_1v}{u_1^2} \cos \theta_l = 2 \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \frac{\sin \theta}{\sin \theta_l} \quad (8.124)$$

Da Equação (8.74),

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta_l} = \cos \theta + \frac{m_1}{m_2} \quad (8.125)$$

Substituindo (8.125) em (8.124),

$$2 \frac{v_1 v}{u_1^2} \cos \theta_l = 2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left[\cos \theta + \frac{m_1}{m_2} \right] \quad (8.126)$$

Usando (8.119), (8.120), (8.126) e (8.118) em (8.114),

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + 2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left(\cos \theta + \frac{m_1}{m_2} \right) \quad (8.127)$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{(m_1 + m_2)^2} (m_2^2 - m_1^2 + 2m_1^2) + \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos \theta \quad (8.128)$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{(m_1 + m_2)^2} (m_1^2 + m_2^2) + \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos \theta \quad (8.129)$$

Somando e diminuindo o termo

$$\frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \quad (8.130)$$

na equação (8.129),

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{(m_1 + m_2)^2} (m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2) + \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos \theta - \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \quad (8.131)$$

Reconhecendo o produto notável

$$m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 = (m_1 + m_2)^2 \quad (8.132)$$

Teremos

$$\frac{T_1}{T_0} = 1 - \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 - \cos \theta) \quad (8.133)$$

A equação (8.133) nos relaciona T_1/T_0 em função do ângulo de espalhamento da partícula 1 no referencial do CM.

Vejamos agora como obtermos (8.133) em função do ângulo de espalhamento da partícula 1 no referencial do LAB, isto é, em função de θ_l . Pela conservação do momento, temos que

$$\vec{P}_{1i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \quad (8.134)$$

A figura 8-12 representa graficamente a equação (8.134). Resolvendo (8.134) para $\vec{P}_{2f}$,

$$\vec{P}_{2f} = \vec{P}_{1i} - \vec{P}_{1f} \quad (8.135)$$

Pela lei dos cossenos,

$$P_{2f}^2 = P_{1i}^2 + P_{1f}^2 - 2P_{1i}P_{1f} \cos \theta_l \quad (8.136)$$

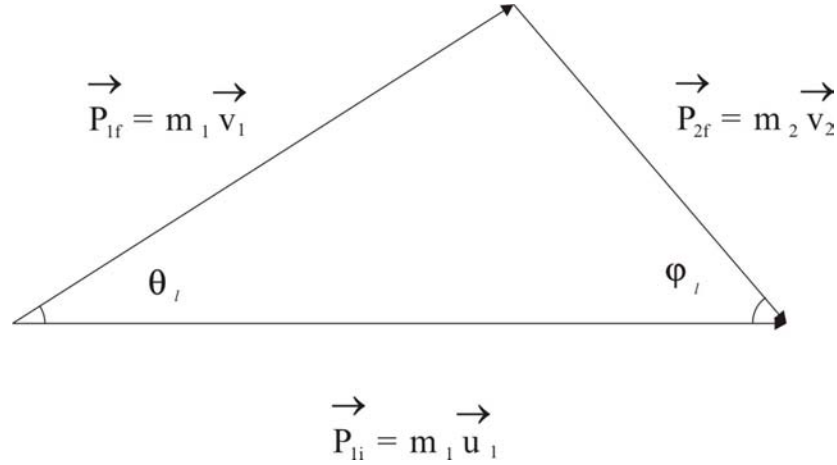


Figura 8-12

Pelo Princípio de Conservação de Energia, temos que

$$E_{1i} = E_{1f} + E_{2f} \quad (8.137)$$

$$\frac{P_{1i}^2}{2m_1} = \frac{P_{1f}^2}{2m_1} + \frac{P_{2f}^2}{2m_2} \quad (8.138)$$

Resolvendo para P_{2f}^2 , teremos

$$\frac{P_{2f}^2}{m_2} = \frac{P_{1i}^2}{m_1} - \frac{P_{1f}^2}{m_1} \quad (8.139)$$

$$P_{2f}^2 = \frac{m_2}{m_1} (P_{1i}^2 - P_{1f}^2)$$

$$P_{2f}^2 = \lambda (P_{1i}^2 - P_{1f}^2) \quad (8.140)$$

em que $\lambda = m_2 / m_1$. Substituindo (8.140) em (8.136),

$$P_{1i}^2 + P_{1f}^2 - 2P_{1i}P_{1f} \cos \theta_i = \lambda (P_{1i}^2 - P_{1f}^2) \quad (8.141)$$

$$P_{1f}^2 (1 + \lambda) - P_{1f} (2P_{1i} \cos \theta_i) + P_{1i}^2 (1 - \lambda) = 0 \quad (8.142)$$

Resolveremos essa equação do 2º grau para P_{1f}

$$P_{1f} = \frac{2P_{1i} \cos \theta_i \pm \left[(2P_{1i} \cos \theta_i)^2 - 4(1 + \lambda)P_{1i}^2(1 - \lambda) \right]^{1/2}}{2(1 + \lambda)} \quad (8.143)$$

$$P_{1f} = \frac{2P_{1i} \{ \cos \theta_i \pm [\cos^2 \theta_i - (1 - \lambda^2)]^{1/2} \}}{2(1 + \lambda)}$$

$$P_{1f} = \frac{P_{1i}}{(1 + \lambda)} \left\{ \cos \theta_i \pm [(\cos^2 \theta_i - 1) + \lambda^2]^{1/2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
P_{1f} &= \frac{P_{1i}}{(1+\lambda)} \left\{ \cos \theta_i \pm \left[-\sin^2 \theta_i + \lambda^2 \right]^{1/2} \right\} \\
P_{1f} &= \frac{P_{1i}}{(1+\lambda)} \left\{ \cos \theta_i \pm \left[\lambda^2 - \sin^2 \theta_i \right]^{1/2} \right\} \\
\frac{P_{1f}}{P_{1i}} &= \frac{1}{(1+\lambda)} \left\{ \cos \theta_i \pm \left[\lambda^2 - \sin^2 \theta_i \right]^{1/2} \right\}
\end{aligned} \tag{8.144}$$

Sabemos que

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{P_{1f}^2 / 2m_1}{P_{1i}^2 / 2m_1} \tag{8.145}$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{P_{1f}^2}{P_{1i}^2} \tag{8.146}$$

Tomando o quadrado da equação (8.144) e substituindo em (8.146),

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{(1+\lambda)^2} \left\{ \cos \theta_i \pm \left[\lambda^2 - \sin^2 \theta_i \right]^{1/2} \right\}^2 \tag{8.147}$$

Como $\lambda = m_2 / m_1$

$$\frac{1}{(1+\lambda)^2} = \frac{1}{(1+m_2/m_1)^2} \tag{8.148}$$

$$= \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} \tag{8.149}$$

assim,

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} \left\{ \cos \theta_i \pm \left[(m_2/m_1)^2 - \sin^2 \theta_i \right]^{1/2} \right\}^2 \tag{8.150}$$

Quando $m_2 > m_1$, usamos o sinal positivo. Para $m_1 > m_2$, as duas raízes são possíveis, que correspondem aos espalhamentos para frente e para trás, discutidos anteriormente.

Relacionaremos agora a energia cinética da partícula 2 após a colisão (T_2) com a energia cinética total antes da colisão (T_0). Pela conservação da energia cinética,

$$T_0 = T_1 + T_2 \tag{8.151}$$

Assim,

$$T_2 = T_0 - T_1 \tag{8.152}$$

Dividindo (8.152) por T_0 ,

$$\frac{T_2}{T_0} = 1 - \frac{T_1}{T_0} \quad (8.153)$$

Substituindo (8.133) em (8.153),

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_0} &= 1 - \left[1 - \frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 - \cos \theta) \right] \\ \frac{T_2}{T_0} &= \left[\frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 - \cos \theta) \right] \end{aligned} \quad (8.154)$$

Da equação (8.92),

$$\varphi_l = \pi / 2 - \theta / 2 \quad (8.92)$$

Resolvendo para θ ,

$$\theta = 2(\pi / 2 - \varphi_l) \quad (8.155)$$

$$\theta = \pi - 2\varphi_l \quad (8.156)$$

Substituindo (8.156) na expressão $(1 - \cos \theta)$, teremos

$$(1 - \cos \theta) = 1 - \cos(\pi - 2\varphi_l) \quad (8.157)$$

$$= 1 - \cos \pi \cos 2\varphi_l - \sin \pi \sin 2\varphi_l$$

$$= 1 + \cos 2\varphi_l$$

$$= 2 \frac{(1 + \cos 2\varphi_l)}{2} \quad (8.158)$$

$$= 2 \cos^2 \varphi_l \quad (8.159)$$

Substituindo (8.159) em (8.154),

$$\frac{T_2}{T_0} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2 \varphi_l \quad (8.160)$$

Quando $m_1 = m_2$, da equação (8.150),

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{m_1^2}{4m_1^2} \{\cos \theta_l + \cos \theta_l\}^2 \quad (8.161)$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \cos^2 \varphi_l \quad (8.162)$$

Substituindo (8.162) em (8.153),

$$\frac{T_2}{T_0} = 1 - \cos^2 \theta_l$$

$$\frac{T_2}{T_0} = \text{sen}^2 \theta_i \quad (8.163)$$

Vimos anteriormente que para $m_1 = m_2$, θ e θ_i estão relacionados pela equação (8.93)

$$\theta = 2\theta_i \quad (8.164)$$

assim,

$$\theta_i = \theta / 2 \quad (8.165)$$

Como $0 \leq \theta \leq \pi$, a equação (8.165) nos diz que

$$\theta_i \leq \frac{\pi}{2}$$

Da equação (8.156), temos que

$$\cos \theta = \cos(\pi - 2\varphi_i) \quad (8.166)$$

$$\cos \theta = -\cos 2\varphi_i \quad (8.167)$$

$$\text{sen} \theta = \text{sen}(\pi - 2\varphi_i) \quad (8.168)$$

$$\text{sen} \theta = \text{sen} 2\varphi_i \quad (8.169)$$

De (8.166) e (8.169), a equação (8.74) poderá ser escrita da forma

$$\text{tg} \theta_i = \frac{\text{sen} 2\varphi_i}{m_1 / m_2 - \cos 2\varphi_i} \quad (8.170)$$

Da figura 8-11,

$$\varphi = \pi - \theta \quad (8.171)$$

Resolvendo para θ ,

$$\theta = \pi - \varphi \quad (8.172)$$

Da equação (8.172),

$$\cos \theta = \cos(\pi - \varphi) \quad (8.173)$$

$$\cos \theta = -\cos \varphi \quad (8.174)$$

$$\text{sen} \theta = \text{sen}(\pi - \varphi) \quad (8.175)$$

$$\text{sen} \theta = \text{sen} \varphi \quad (8.176)$$

Substituindo (8.173) e (8.176) em (8.74) teremos

$$\text{tg} \theta_i = \frac{\text{sen} \varphi}{m_1 / m_2 - \cos \varphi} \quad (8.177)$$

As equações (8.74), (8.92), (8.170), (8.172) e (8.177) nos mostram como os ângulos de espalhamento estão relacionados.

8-4 SEÇÃO DE CHOQUE DE ESPALHAMENTO NOS SISTEMAS DO CM E LAB

Conhecida a lei de interação entre partículas, teríamos a solução completa do problema. Quando na impossibilidade desse conhecimento, medidas da seção de choque são feitas para testar a validade das teorias e/ou modelos de interação. Esse problema já foi abordado no capítulo 6 (Forças Centrais).

Como as medidas são feitas no laboratório, usamos como referencial o referencial do LAB. Nesta seção mostraremos como relacionar a seção de choque no referencial do LAB com a seção de choque no referencial do CM. Essa conexão é feita observando que o número de partículas, em um ângulo sólido unitário, é igual tanto no referencial do LAB quanto no referencial do CM, isto é,

$$I\sigma(\theta)d\Omega(\theta) = I\sigma(\theta_i)d\Omega(\theta_i)$$

Resolvendo para $\sigma(\theta_i)$ e usando que $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$, teremos

$$\sigma(\theta_i) = \sigma(\theta) \frac{\sin\theta}{\sin\theta_i} \frac{d\theta}{d\theta_i} \quad (8.178)$$

Aplicando a lei dos senos a figura 8-8,

$$\frac{\sin(\theta - \theta_i)}{v} = \frac{\sin\theta_i}{v_1} \quad (8.179)$$

$$\frac{\sin(\theta - \theta_i)}{\sin\theta_i} = \frac{v}{v_1} \quad (8.180)$$

Considerando a equação (8.73), a equação (8.180) poderá ser escrita como

$$\frac{\sin(\theta - \theta_i)}{\sin\theta_i} = \frac{m_1}{m_2} \quad (8.181)$$

Definindo

$$\chi = m_1 / m_2 \quad (8.182)$$

teremos

$$\frac{\sin(\theta - \theta_i)}{\sin\theta_i} = \chi \quad (8.183)$$

$$\text{sen}(\theta - \theta_i) = \chi \text{sen}\theta_i \quad (8.184)$$

Derivando a equação anterior em relação a θ_i ,

$$\cos(\theta - \theta_i) \left(\frac{d\theta}{d\theta_i} - 1 \right) = \chi \cos\theta_i \quad (8.185)$$

$$\cos(\theta - \theta_i) \frac{d\theta}{d\theta_i} = \chi \cos\theta_i + \cos(\theta - \theta_i)$$

$$\frac{d\theta}{d\theta_i} = \frac{1}{\cos(\theta - \theta_i)} [\chi \cos\theta_i + \cos(\theta - \theta_i)] \quad (8.186)$$

Substituindo (8.183) em (8.186),

$$\frac{d\theta}{d\theta_i} = \frac{1}{\cos(\theta - \theta_i)} \left[\frac{\text{sen}(\theta - \theta_i)}{\text{sen}\theta_i} \cos\theta_i + \cos(\theta - \theta_i) \right] \quad (8.187)$$

$$\frac{d\theta}{d\theta_i} = \frac{1}{\cos(\theta - \theta_i)} \left[\frac{\text{sen}(\theta - \theta_i) \cos\theta_i + \cos(\theta - \theta_i) \text{sen}\theta_i}{\text{sen}\theta_i} \right] \quad (8.188)$$

$$\frac{d\theta}{d\theta_i} = \frac{1}{\cos(\theta - \theta_i)} \frac{\text{sen}[(\theta - \theta_i) + \theta_i]}{\text{sen}\theta_i} \quad (8.189)$$

$$\frac{d\theta}{d\theta_i} = \frac{\text{sen}\theta}{\cos(\theta - \theta_i) \text{sen}\theta_i} \quad (8.190)$$

Substituindo (8.190) em (8.178),

$$\sigma(\theta_i) = \sigma(\theta) \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta_i} \frac{\text{sen}\theta}{\cos(\theta - \theta_i) \text{sen}\theta_i} \quad (8.191)$$

$$\sigma(\theta_i) = \sigma(\theta) \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos(\theta - \theta_i) \text{sen}^2\theta_i} \quad (8.192)$$

Multiplicando (8.183) por $\cos\theta_i$ e somando $\cos(\theta - \theta_i)$ nos dois lados da equação, teremos

$$\frac{\text{sen}(\theta - \theta_i) \cos\theta_i}{\text{sen}\theta_i} + \cos(\theta - \theta_i) = \chi \cos\theta_i + \cos(\theta - \theta_i) \quad (8.193)$$

$$\frac{\text{sen}(\theta - \theta_i) \cos\theta_i + \cos(\theta - \theta_i) \text{sen}\theta_i}{\text{sen}\theta_i} = \chi \cos\theta_i + \cos(\theta - \theta_i) \quad (8.194)$$

$$\frac{\text{sen}[(\theta - \theta_i) + \theta_i]}{\text{sen}\theta_i} = \chi \cos\theta_i + \cos(\theta - \theta_i)$$

$$\frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta_i} = \chi \cos\theta_i + \cos(\theta - \theta_i) \quad (8.195)$$

Como

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\theta - \theta_i) &= \chi \operatorname{sen} \theta_i \\ \cos(\theta - \theta_i) &= \left[1 - \chi^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i\right]^{1/2}\end{aligned}\quad (8.196)$$

Substituindo (8.195) e (8.196) em (8.192),

$$\sigma(\theta_i) = \frac{\left[\chi \cos \theta_i + \left(1 - \chi^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i\right)^{1/2}\right]^2}{\left(1 - \chi^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i\right)^{1/2}} \sigma(\theta) \quad (8.197)$$

Resolvendo a equação (8.184) para θ , teremos

$$\begin{aligned}\theta - \theta_i &= \arcsen[\chi \operatorname{sen}(\theta_i)] \\ \theta &= \arcsen[\chi \operatorname{sen}(\theta_i)] + \theta_i\end{aligned}\quad (8.198)$$

As equações (8.197) e (8.198) nos relaciona a seção de choque no referencial do CM $[\sigma(\theta)]$ com a seção de choque no referencial do CM $[\sigma(\theta_i)]$. Essas equações têm validade apenas quando

$$v < v' \quad (8.199)$$

$$\chi < 1 \quad (8.200)$$

Entretanto, se usarmos a definição de χ pela equação (8.180) em vez de (8.181), a seção de choque teria validade também para colisões inelásticas. Devemos observar também que essa validade se estende até a Mecânica Quântica.

Vejamos agora alguns casos particulares:

a) Quando $m_1 = m_2$, $\chi = 1$. De (8.198)

$$\theta = \arcsen(\theta_i) + \theta_i \quad (8.201)$$

$$\operatorname{sen}(\theta - \theta_i) = \operatorname{sen} \theta_i \quad (8.202)$$

$$\theta - \theta_i = \theta_i$$

$$\theta = 2\theta_i \quad (8.203)$$

Substituindo o valor de θ e de χ em (8.197)

$$\begin{aligned}\sigma(\theta_i) &= \frac{(\cos \theta_i + \cos \theta_i)^2}{\cos \theta_i} \sigma(\theta) \\ \sigma(\theta_i) &= 4 \cos \theta_i \sigma(\theta) \Big|_{\theta=2\theta_i}\end{aligned}\quad (8.204)$$

b) Quando $m_1 \ll m_2$, $\chi \approx 0$. De (8.198)

$$\theta \approx \theta_i \quad (8.205)$$

De (8.197)

$$\sigma(\theta_i) = \sigma(\theta) \Big|_{\theta=\theta_i} \quad (8.206)$$

8-5 ESPALHAMENTO POR UMA FORÇA CENTRAL

Aplicaremos aqui a teoria de espalhamento por uma força central, desenvolvida nas seções precedentes, para o cálculo das seções de choque diferencial e total. Trataremos da colisão entre duas partículas no referencial do CM. Esse problema equivale ao espalhamento de uma única partícula por um potencial central cujo centro é o CM das duas partículas.

Mostramos na figura 8-13 uma partícula de massa m movendo-se sob a ação de um potencial $U(r)$ cujo centro está em repouso no ponto 0 (origem) e que se anula para pontos longe desta.

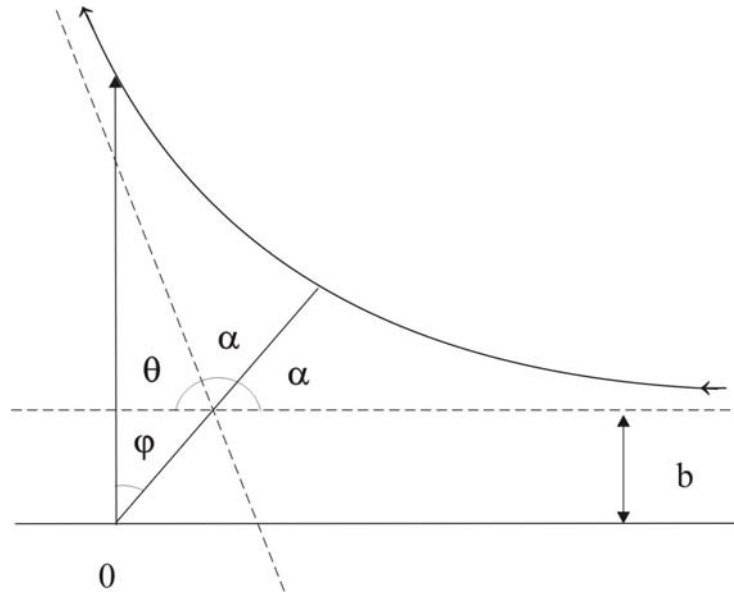


Figura 8-13

Da figura 8-13, vemos que

$$\theta = |\pi - 2\alpha| \quad (8.207)$$

onde

$$\alpha = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{L dr / r^2}{\sqrt{2m(E - U) - L^2 / r^2}} \quad (8.208)$$

conforme equação (6.62). Aqui, $r_{\min}$ é o ponto de maior aproximação. Para pontos muito longe da origem a energia da partícula é constituída apenas de energia cinética

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (8.209)$$

O momento angular será

$$L = mvb \quad (8.210)$$

Substituindo (8.209) e (8.210) em (8.208),

$$\alpha = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(mvb/r^2)dr}{\sqrt{2m\left(\frac{1}{2}mv^2\right) - 2mU - \left(\frac{mvb}{r}\right)^2}} \quad (8.211)$$

$$\alpha = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(mvb/r^2)dr}{\sqrt{m^2v^2\left(1 - \frac{2U}{mv^2} - \frac{b^2}{r^2}\right)}}$$

$$\alpha = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{(b/r^2)dr}{\sqrt{1 - \frac{2U}{mv^2} - \frac{b^2}{r^2}}} \quad (8.212)$$

que nos dá o ângulo de espalhamento em função do parâmetro de impacto (b) para um determinado potencial $U(r)$.

Para o espalhamento de Rutherford, temos que

$$U(r) = \frac{zz'e^2}{r} \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (8.213)$$

Fazendo $\beta = zz'e^2$, teremos

$$U(r) = \beta/r \quad (8.214)$$

Assim, (8.212) ficará

$$\alpha = \int \frac{(b/r^2)dr}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{\beta}{Tr}}} \quad (8.215)$$

$$\alpha = \int \frac{(b/r)dr}{r\sqrt{\frac{1}{r^2}(r^2 - b^2 - \beta r/T)}}$$

$$\alpha = \int \frac{bdr}{r\sqrt{(r^2 - \beta r/T - b^2)}} \quad (8.216)$$

Sabemos que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsen\left(\frac{Bx+2C}{x\sqrt{Q}}\right) \quad (8.217)$$

para $C < 0$, $B^2 > 4AC$, e

$$Q = B^2 - 4AC \quad (8.218)$$

Comparando com (8.216) vemos que

$$A=1, B=-\beta/T \text{ e } C=-b^2 \quad (8.219)$$

assim,

$$Q = \beta^2/T^2 + 4b^2 \quad (8.220)$$

de modo que a solução da integral da equação (8.216) ficará

$$\alpha = \frac{b}{b} \arcsen\left(\frac{-\beta r/T - 2b^2}{r\sqrt{\beta^2/T^2 + 4b^2}}\right) \quad (8.221)$$

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{-\beta r/T - 2b^2}{r\sqrt{\beta^2/T^2 + 4b^2}}\right) \quad (8.222)$$

Fazendo

$$k = \beta/2T \quad (8.223)$$

$$-\beta r/T - 2b^2 = -2kr - 2b^2,$$

$$-\beta r/T - 2b^2 = -2kr(1 + b^2/kr) \quad (8.224)$$

e

$$r\sqrt{\beta^2/T^2 + 4b^2} = r\sqrt{2^2k^2 + 4b^2} \quad (8.225)$$

$$r\sqrt{\beta^2/T^2 + 4b^2} = 2r\sqrt{k^2 + b^2}$$

$$r\sqrt{\beta^2/T^2 + 4b^2} = 2rb\sqrt{1 + k^2/b^2} \quad (8.226)$$

Dividindo (8.224) por (8.226),

$$\frac{-2kr(1 + b^2/kr)}{2rb\sqrt{1 + k^2/b^2}} = \left[\frac{-k/b}{\sqrt{1 + k^2/b^2}} (1 + b^2/kr) \right] \quad (8.227)$$

Substituindo esse resultado em (8.222)

$$\alpha = \arcsen\left[\frac{-k/b}{\sqrt{1 + k^2/b^2}} (1 + b^2/kr)\right]_{r_{\min}}^{\infty} \quad (8.228)$$

$$\alpha = \arcsen \left[\frac{-k/b}{\sqrt{1+k^2/b^2}} \right] - \arcsen \left[\frac{-k/b}{\sqrt{1+k^2/b^2}} (1+b^2/kr_{\min}) \right] \quad (8.229)$$

Veremos agora como calcular $r_{\min}$. Pela conservação do momento angular teremos que em $r = \infty$ e em $r = r_{\min}$,

$$L(r = \infty) = L(r = r_{\min}) \quad (8.230)$$

$$mv(r = \infty)b = mv(r = r_{\min})r_{\min}$$

$$v(r = \infty)b = v(r = r_{\min})r_{\min} \quad (8.231)$$

Sabemos que no infinito, o sistema tem apenas energia cinética, dada por

$$T = \frac{1}{2}mv^2(r = \infty) \quad (8.232)$$

Resolvendo para v

$$v(r = \infty) = \sqrt{\frac{2T}{m}} \quad (8.233)$$

Substituindo a equação (8.233) em (8.231) e resolvendo para $v(r = r_{\min})$, teremos

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2T}{m}}b &= v(r = r_{\min})r_{\min} \\ v(r = r_{\min}) &= \sqrt{\frac{2T}{m}} \frac{b}{r_{\min}} \end{aligned} \quad (8.234)$$

Pela conservação da energia nos pontos $r = \infty$ e $r = r_{\min}$,

$$E(r = \infty) = E(r = r_{\min})$$

No infinito temos apenas energia cinética, enquanto em $r = r_{\min}$ temos energia cinética e potencial, de modo que

$$T = \frac{1}{2}mv^2(r = r_{\min}) + \frac{\beta}{r_{\min}} \quad (8.235)$$

Substituindo a equação (8.234) na equação (8.235),

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m \frac{2T}{m} \left(\frac{b}{r_{\min}} \right)^2 + \frac{\beta}{r_{\min}} \\ T &= \left(\frac{Tb^2}{r_{\min}^2} \right) + \frac{\beta}{r_{\min}} \end{aligned} \quad (8.236)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 Tr_{\min}^2 &= Tb^2 + \beta r_{\min} \\
 Tr_{\min}^2 - \beta r_{\min} - Tb^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{8.237}$$

Resolvendo a equação (8.237) para $r_{\min}$, teremos

$$r_{\min} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4Tb^2}}{2T} \tag{8.238}$$

$$\begin{aligned}
 r_{\min} &= \frac{\beta}{2T} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 + (2Tb)^2}}{2T} \\
 r_{\min} &= \frac{\beta}{2T} \pm \frac{\beta}{2T} \sqrt{1 + \left(\frac{2Tb}{\beta}\right)^2} \\
 r_{\min} &= \frac{\beta}{2T} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{2Tb}{\beta}\right)^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{8.239}$$

Fazendo agora

$$\frac{\beta}{2T} = k \tag{8.240}$$

$$r_{\min} = k \left\{ 1 \pm \left[1 + \left(\frac{b}{k} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \tag{8.241}$$

Como a força é repulsiva, devemos tomar a raiz positiva. Assim,

$$r_{\min} = k \left\{ 1 + \left[1 + \left(\frac{b}{k} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \tag{8.242}$$

Veremos agora como escrever o termo $\left(1 + \frac{b^2}{kr_{\min}} \right)$

$$\left(1 + \frac{b^2}{kr_{\min}} \right) = \left\{ 1 + \frac{b^2}{kk \left\{ 1 + \left[1 + \left(\frac{b}{k} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}} \right\} \tag{8.243}$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{kr_{\min}} \right) = \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{b}{k} \right)^2}{\left\{ 1 + \left[1 + \left(\frac{b}{k} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}} \right\} \tag{8.244}$$

Fazendo agora

$$\frac{b}{k} = u \tag{8.245}$$

podemos escrever a equação (8.244) da forma

$$\left(1 + b^2 / kr_{\min}\right) = \left\{1 + \frac{u^2}{\left\{1 + [1 + u^2]^{1/2}\right\}}\right\} \quad (8.246)$$

$$\left(1 + b^2 / kr_{\min}\right) = \frac{1 + [1 + u^2]^{1/2} + u^2}{\left\{1 + [1 + u^2]^{1/2}\right\}}$$

$$\left(1 + b^2 / kr_{\min}\right) = \frac{1 + u^2 + [1 + u^2]^{1/2}}{\left\{1 + [1 + u^2]^{1/2}\right\}} \quad (8.247)$$

Tomando

$$1 + u^2 = c^2 \quad (8.248)$$

teremos

$$\left(1 + b^2 / kr_{\min}\right) = \frac{c^2 + c}{1 + c} = \frac{c(1 + c)}{(1 + c)}$$

$$\left(1 + b^2 / kr_{\min}\right) = c \quad (8.249)$$

Veremos agora como escrever o termo $\frac{-(k/b)}{\sqrt{1 + (k/b)^2}}$ em função de u .

Substituindo o valor de u dado pela equação (8.245), teremos

$$\frac{-(k/b)}{\sqrt{1 + (k/b)^2}} = \frac{-1/u}{\sqrt{1 + 1/u^2}} \quad (8.250)$$

$$\frac{-(k/b)}{\sqrt{1 + (k/b)^2}} = \frac{1}{u} \frac{-1}{[1 + u^2]^{1/2}}$$

$$\frac{-(k/b)}{\sqrt{1 + (k/b)^2}} = \frac{-1}{[1 + u^2]^{1/2}} \quad (8.251)$$

Usando agora a equação (8.248),

$$\frac{-(k/b)}{\sqrt{1 + (k/b)^2}} = -\frac{1}{c} \quad (8.252)$$

Substituindo as equações (8.252) e (8.249) em (8.229),

$$\alpha = \arcsen\left(-\frac{1}{c}\right) - \arcsen\left(-\frac{1}{c}c\right) \quad (8.253)$$

Como $\arcsen(-1) = -\pi/2$,

$$\alpha = \arcsen\left(-\frac{1}{c}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (8.254)$$

então,

$$\alpha - \frac{\pi}{2} = \arcsen\left(-\frac{1}{c}\right) \quad (8.255)$$

Logo,

$$\sen\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{c} \quad (8.256)$$

Substituindo o valor de c , dado pela equação (8.248), e expandindo o lado esquerdo da equação anterior,

$$\sen(\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\alpha) = \frac{-1}{[1+u^2]^{1/2}} \quad (8.257)$$

$$-\cos \alpha = \frac{-1}{[1+u^2]^{1/2}} \quad (8.258)$$

Da equação (8.245) podemos reescrever (8.258) da forma

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(b/k)^2}} \quad (8.259)$$

Observando que,

$$\begin{aligned} \sen \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ \sen \alpha &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+(b/k)^2}}\right)^2} = \frac{[1+(b/k)^2 - 1]^{1/2}}{\sqrt{1+(b/k)^2}} \\ \sen \alpha &= \frac{(b/k)}{\sqrt{1+(b/k)^2}} \end{aligned} \quad (8.260)$$

Dividindo (8.260) por (8.259),

$$\tg \alpha = \frac{b}{k} \quad (8.261)$$

Da equação (8.92), temos que

$$\alpha = \pi / 2 - \theta / 2 \quad (8.92)$$

assim, (8.261) será escrita como

$$b = k \operatorname{tg}(\pi / 2 - \theta / 2) \quad (8.262)$$

$$b = k \cotg(\theta / 2) \quad (8.263)$$

Derivando b em relação a θ , teremos

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{-k}{2} \operatorname{cosec}^2(\theta / 2) \quad (8.264)$$

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{-k}{2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta / 2)} \quad (8.265)$$

Da equação (6.227), temos que

$$\sigma(\theta) = \frac{-b}{\operatorname{sen}\theta} \frac{db}{d\theta} \quad (8.266)$$

Substituindo (8.263) e (8.265) em (8.266),

$$\sigma(\theta) = \frac{k \cotg(\theta / 2)}{\operatorname{sen}\theta} \frac{k}{2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta / 2)} \quad (8.267)$$

$$\sigma(\theta) = \frac{k^2 \cos(\theta / 2)}{2 \operatorname{sen}(\theta / 2)} \frac{1}{2 \operatorname{sen}(\theta / 2) \cos(\theta / 2)} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta / 2)}$$

$$\sigma(\theta) = \frac{k^2}{4} \frac{1}{\operatorname{sen}^4(\theta / 2)} \quad (8.268)$$

Substituindo o valor de k dado pela equação (8.240), na equação (8.268),

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{\beta}{2T} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^4(\theta / 2)} \quad (8.269)$$

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{\beta}{4T} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^4(\theta / 2)} \quad (8.270)$$

Na experiência de Rutherford, sabemos que $\beta = zz'e^2$, onde z é o número atômico da partícula α ($z = 2$); z' é o número atômico do alvo de ouro ($z' = 79$) e e a carga do elétron. A equação (8.270) é conhecida como fórmula de Rutherford para o espalhamento de partículas alfa. Devemos observar que o tratamento quântico dado a esse problema leva ao mesmo resultado, fato que contribuiu decisivamente para o desenvolvimento da Mecânica Quântica.

A fórmula de Rutherford as vezes é escrita em função do momento transferido pela partícula alfa

$$\vec{Q} = \vec{P}_f - \vec{P}_0 \quad (8.271)$$

assim,

$$Q^2 = P_f^2 + P_0^2 - 2P_f P_0 \cos \theta \quad (8.272)$$

Pelo Teorema de Conservação de Energia temos que

$$\frac{P_0^2}{2m} = \frac{P_f^2}{2m} + \frac{Q^2}{2M} \quad (8.273)$$

onde M é a massa do alvo e m a massa da partícula α . Considerando que $M \gg m$, a equação (8.273) se reduz a

$$P_0 = P_f = mv \quad (8.274)$$

assim, a equação (8.272) ficará

$$Q^2 = 2P_0^2 - 2P_0^2 \cos \theta \quad (8.275)$$

$$= 2P_0^2 (1 - \cos \theta)$$

$$= 2P_0^2 2 \frac{(1 - \cos \theta)}{2}$$

$$= 4P_0^2 \sin^2 (\theta/2)$$

$$= 4m^2 v^2 \sin^2 (\theta/2)$$

$$= 8m \frac{mv^2}{2} \sin^2 (\theta/2)$$

$$Q^2 = 2m [4T \sin^2 (\theta/2)] \quad (8.276)$$

Da equação (8.276),

$$\frac{2m}{Q^2} = \frac{1}{4T \sin^2 (\theta/2)} \quad (8.277)$$

Da equação (8.277) e (8.270), teremos

$$\sigma(\theta) = \beta^2 \left(\frac{2m}{Q^2} \right)^2 \quad (8.278)$$

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{2m\beta}{Q^2} \right)^2 \quad (8.279)$$

Na situação experimental real, cada partícula α é espalhada mais de uma vez quando atravessa a folha de ouro, de modo que o ângulo de deflexão total é o resultado de múltiplos espalhamentos, que não será tratado aqui.

Até agora discutimos como calcular a seção de choque diferencial. Entretanto, para sabermos a probabilidade total, devemos integrar $\sigma(\theta)$ em todos os ângulos possíveis, isto é,

$$\sigma_t = \int \sigma(\theta) d\Omega \quad (8.280)$$

$$\sigma_t = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=\theta_0}^{\pi} \sigma(\theta) \sin\theta d\theta \quad (8.281)$$

Substituindo (8.270) em (8.281),

$$\sigma_t = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=\theta_0}^{\pi} \left(\frac{\beta}{4T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \sin\theta d\theta \quad (8.282)$$

$$\sigma_t = \left(\frac{\beta}{4T} \right)^2 2\pi \int_{\theta=\theta_0}^{\pi} \frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} d\theta$$

$$\sigma_t = \left(\frac{\beta}{4T} \right)^2 4\pi \int_{\theta=\theta_0}^{\pi} \frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)} d\theta \quad (8.283)$$

Vejamos como resolver a integral

$$I = \int \frac{\cos(\theta/2) d\theta}{\sin^3(\theta/2)} \quad (8.284)$$

Fazendo

$$\frac{\theta}{2} = u \quad (8.285)$$

$$d\theta = 2du \quad (8.286)$$

$$I = 2 \int \frac{\cos u}{\sin^3 u} du \quad (8.287)$$

Fazendo agora

$$\sin u = a \quad (8.288)$$

$$\cos u du = da \quad (8.289)$$

$$I = 2 \int \frac{da}{a^3} \quad (8.290)$$

$$I = 2 \frac{a^{-2}}{-2} = \frac{-1}{a^2} \quad (8.291)$$

$$I = \frac{-1}{\text{sen}^2 u} = \frac{-1}{\text{sen}^2 (\theta/2)} \quad (8.292)$$

assim, (8.283) pode ser escrita como

$$\sigma_t = 2\pi \left(\frac{\beta}{2T} \right)^2 \left[\frac{-1}{\text{sen}^2 (\theta/2)} \right]_{\theta_0}^{\pi} \quad (8.293)$$

$$\sigma_t = 2\pi \left(\frac{\beta}{2T} \right)^2 \left[-1 + \frac{1}{\text{sen}^2 (\theta_0/2)} \right] \quad (8.294)$$

Observamos que $\sigma_t \rightarrow \infty$ quando $\theta_0 \rightarrow 0$. Esse resultado inconsistente é causado pelo fato de que a Lei de Coulomb é de longo alcance. Para retificar esse problema, utiliza-se o potencial de Coulomb blindado

$$U(r) = \frac{k}{r} e^{-r/a} \quad (8.295)$$

em que k é uma constante e a o raio de blindagem da nuvem eletrônica. Para átomos mais ou menos pesados

$$a = \frac{\hbar^2}{me^2 Z^{1/3}} \quad (8.296)$$

cujo valor é obtido através da Teoria Estatística de Fermi-Dirac.

MOVIMENTO DE CORPOS RÍGIDOS

9-1 INTRODUÇÃO

Durante os capítulos precedentes deixamos claro o objetivo da Mecânica Clássica em aplicar as Leis de Movimento e os Teoremas de Conservação a sistemas físicos reais. Para estudarmos um corpo macroscópico, iniciamos o estudo de uma partícula, seguido da generalização para um sistema de partículas, com vista ao desenvolvimento de uma abordagem adequada para tratar de corpos macroscópicos. Nessa perspectiva, idealizamos um corpo macroscópico como um sistema de muitas partículas em que as distâncias existentes entre elas são mantidas constantes, através de forças internas (forças de vínculo que obedecem às Leis de Newton), denominado a partir de agora como corpo rígido, isto é, o corpo rígido seria um sistema de n partículas com a restrição

$$r_{ij} = c_{ij} \quad (9.1)$$

Aqui, r_{ij} é a distância da partícula i a partícula j , que seria constante (c_{ij}) em qualquer instante de tempo. Sendo assim, para uma distribuição contínua de massa, lançamos mão do conceito de densidade de massa (ρ) como a massa (dM) contida em um elemento de volume (dV)

$$\rho = \frac{dM}{dV} \quad (9.2)$$

Devemos observar que o elemento de volume (dV) deve ser suficientemente grande para conter um grande número de átomos e suficientemente pequeno para que suas propriedades sejam consideradas uniformes. Neste caso, definimos corpo rígido como um corpo onde a distância entre dois elementos quaisquer de volume permanece constante no tempo.

Apesar de ser uma boa aproximação do real, o conceito de corpo rígido exclui os efeitos elásticos e é incompatível com a Teoria da Relatividade Especial, assunto não tratado nessa disciplina.

Quando estudamos um sistema discreto de n partículas, obtivemos as seguintes equações:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (9.3)$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (9.4)$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \quad (9.5)$$

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad (9.6)$$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \quad (9.7)$$

$$\vec{\tau}^{ext} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} \quad (9.8)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{ext} \quad (9.9)$$

Para um sistema contínuo, basta substituírmos o somatório por uma integral. Partindo dessas equações, procuraremos generalizá-las de modo a serem adequadas ao estudo do movimento de corpos rígidos.

Iniciaremos nosso estudo pela cinemática; passaremos à dinâmica, finalizando com a aplicação da teoria ao problema do pião simétrico – uma das principais aplicações ao movimento de corpos rígidos.

9-2 O MOVIMENTO DE UM CORPO RÍGIDO

Para descrevermos o movimento de um corpo rígido no espaço devemos, primeiramente, determinar o número de coordenadas necessárias.

Tomemos um corpo rígido de formato arbitrário, conforme mostra a figura 9-1. Fixando-se um ponto (ponto 0) do referido corpo, vemos que qualquer ponto $\mathbf{P}$ situado a uma distância $\mathbf{r}$ de $\mathbf{0}$ deve girar sobre uma esfera de raio $\mathbf{r}$ e centro em $\mathbf{0}$ (Teorema de Euler).

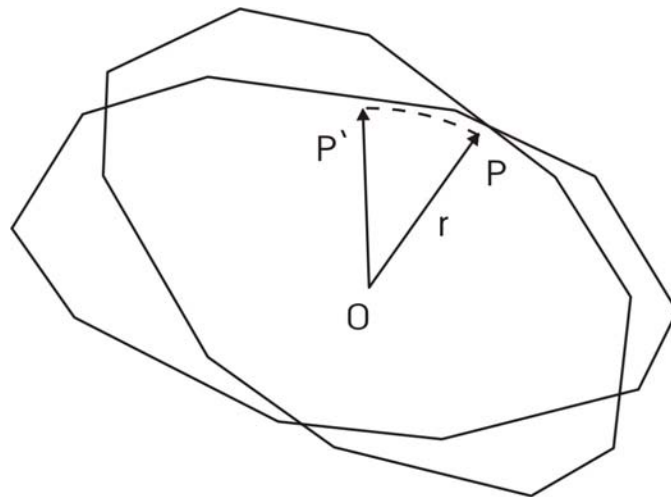


Figura 9-1

Isto significa que temos uma rotação em torno de um ponto fixo. Para descrevermos o movimento desse ponto fixo no espaço necessitamos de três coordenadas. Para localizarmos o ponto **P** no espaço, precisamos de duas coordenadas. Devido à simetria do movimento, para um **r** fixo, duas coordenadas angulares seriam necessárias.

Fixando-se 2 pontos **A** e **B**, conforme mostra a figura 9-2, todos os pontos situados ao longo da reta que passa por estes pontos permanecerão fixos. Denominamos essa reta de eixo de rotação, pois qualquer ponto **P** situado fora dessa reta descreverá um movimento de rotação em torno do referido eixo, necessitando de apenas uma única coordenada para descrever seu movimento – o ângulo de rotação.

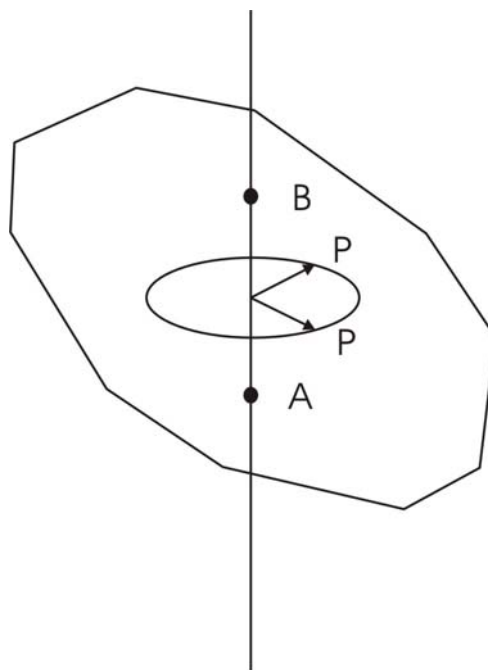


Figura 9-2

Fixando-se um terceiro ponto **C** não colinear com **A** e **B**, como mostra a figura 9-3, o corpo rígido ficará fixo no espaço. Sendo assim, precisaremos de 6 coordenadas ($3+2+1=6$)

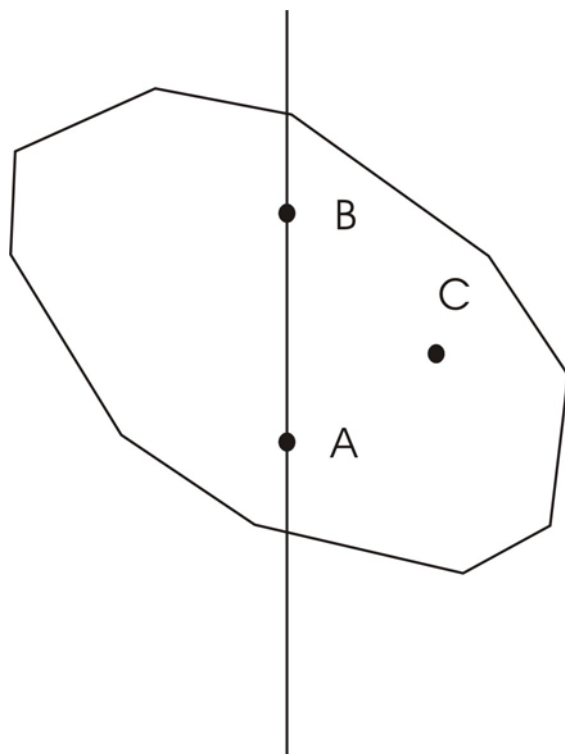


Figura 9-3

para descrever o movimento de um corpo rígido no espaço. Associamos então 3 coordenadas a um sistema de referência que serviria para descrever o movimento de um ponto do corpo em relação a um referencial inercial. As outras 3, a um outro sistema de referência localizado em um ponto do corpo rígido, que serviria para descrever a orientação deste no espaço, como mostra a figura 9-4. Caso o corpo possa mover-se livremente, é conveniente escolhermos o centro de massa como sendo esse ponto. Dessa forma, o movimento do centro de massa do corpo rígido seria tomado em relação ao referencial inercial, enquanto o referencial localizado no centro de massa do corpo rígido descreveria a orientação do corpo rígido em relação ao referencial inercial. Isso nos leva a pensar em descrever o movimento geral do corpo rígido como a combinação de movimentos de rotação e translação (Teorema de Chasles).

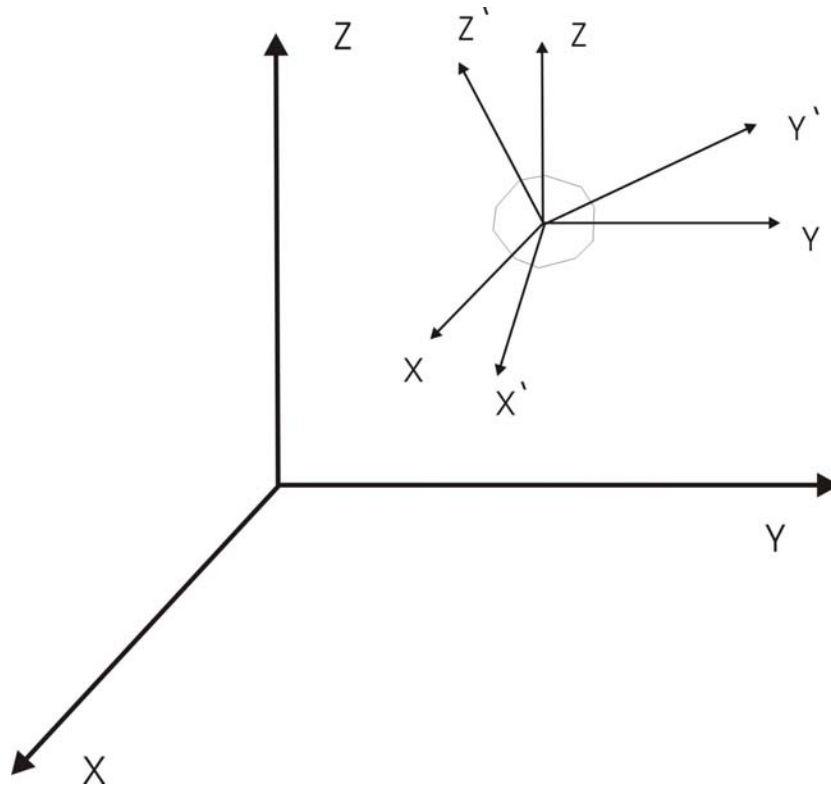


Figura 9-4

A descrição do movimento de translação do centro de massa seria obtida pela solução da equação

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (9.10)$$

Em relação ao movimento de rotação em torno do centro de massa, através da solução da equação

$$\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (9.11)$$

Aqui, fazem-se necessárias algumas considerações particulares de soluções:

- 1 – Para uma força externa nula, o centro de massa descreveria movimento retilíneo e uniforme; para um torque externo nulo, o momento angular em torno do centro de massa seria constante e o corpo estaria em equilíbrio. Se em $t=0$ a velocidade do centro de massa for nula, assim como o momento angular em torno do centro de massa, teremos equilíbrio estático;
- 2 – Se a força externa for independente da orientação do corpo rígido no espaço, os movimentos de translação do centro de massa e de rotação em torno do centro de massa

são independentes, possibilitando que o problema seja solucionado pelos métodos já apresentados nos capítulos precedentes;

3 – Se o torque externo for independente da posição do centro de massa, ou se a posição do centro de massa é conhecida para qualquer instante de tempo, então é possível descrever o movimento de rotação do corpo rígido em torno do centro de massa, uma vez que o torque externo pode ser obtido em função da orientação do corpo rígido no espaço e no tempo;

4 – Caso o corpo rígido sofra alguma restrição que o obrigue a mover-se em torno de um ponto, o torque e o momento angular devem ser tomados em relação a esse ponto.

No caso mais geral possível, devemos resolver as duas equações, equações (9.10) e (9.11), acopladas em um sistema de coordenadas apropriado.

Na descrição do movimento do centro de massa do corpo rígido em relação a um referencial inercial, não teríamos problema em escolher um sistema de coordenadas cartesiano. Quanto à escolha do sistema de coordenadas que faria a orientação do corpo rígido em relação ao referencial inercial, cuidados especiais devem ser tomados. Uma possível escolha seria utilizar os cossenos diretores para relacionar os referenciais xyz e $x'y'x'$, mostrados na figura 9-4. Esse procedimento nos daria uma matriz 3×3 (com 9 elementos). O fato de escolhermos uma base ortonormal faria com que desses 9 elementos de matriz, apenas 3 fossem linearmente independentes. Isso inviabilizaria o uso desses cossenos diretores como coordenadas generalizadas, procedimento a ser desenvolvido na formulação lagrangeana da Mecânica.

Como citado anteriormente, o sistema de coordenadas de orientação do corpo rígido em relação ao referencial inercial serviria para descrever a rotação do corpo rígido. Uma escolha adequada de coordenadas para descrever rotações é conhecida como ângulos de Euler, tema de nossa próxima seção.

9-3 OS ÂNGULOS DE EULER

Nosso problema consiste em estabelecer a relação entre os sistemas de coordenadas xyz e $x'y'x'$, mostrados na figura 9-4. A transformação de um sistema de coordenadas para outro pode ser representada por uma equação matricial do tipo

$$\vec{X}' = R\vec{X} \quad (9.12)$$

onde $\vec{X}$ seria o sistema de coordenadas fixo e $\vec{X}'$ o sistema de coordenadas do corpo rígido. Os ângulos de Euler (θ, φ, ψ) são um dos possíveis conjunto de coordenadas a satisfazerem a equação (9.12).

Para determinarmos a matriz de transformação, que é na realidade uma matriz rotação, faremos 3 rotações sucessivas com ângulos θ , φ e ψ em torno de determinados eixos. Utilizaremos aqui a seqüência de rotação conhecida como convenção de Goldstein, por ser a mais utilizada.

1ª rotação – R_1

Rotação anti-horária em torno do eixo-z, com ângulo φ , conforme mostra a figura 9-5

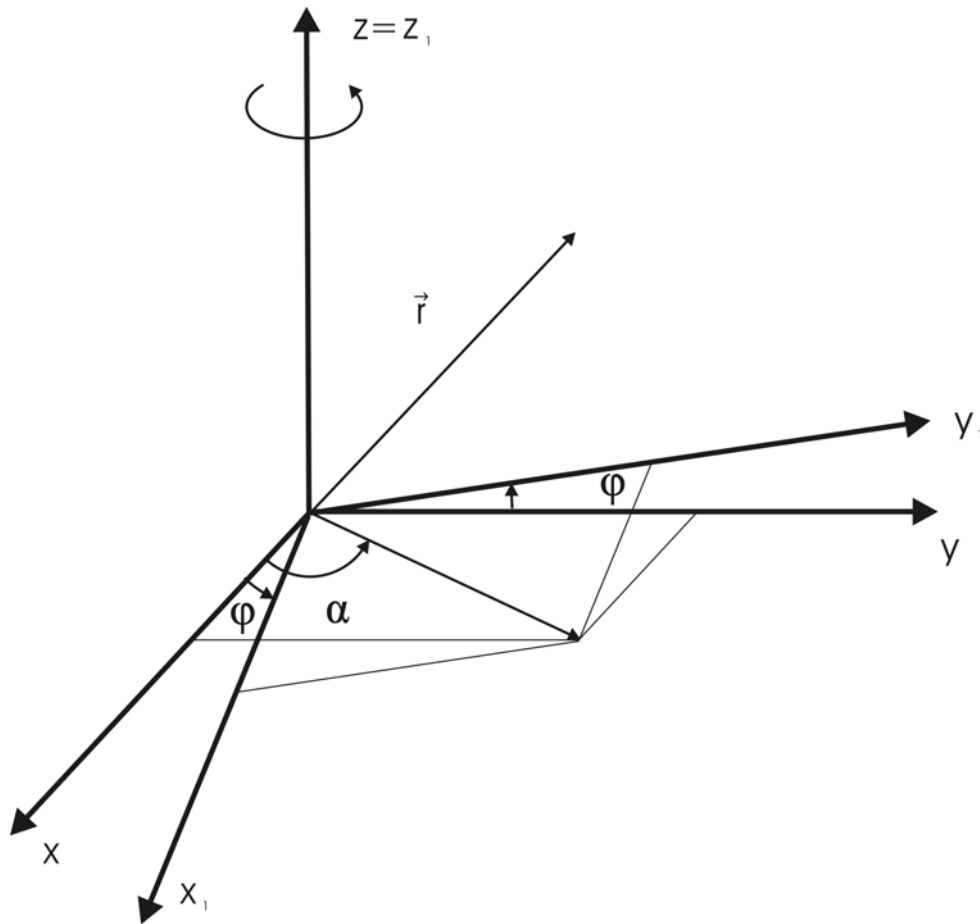


Figura 9-5

Da figura 9-5 vemos que

$$x = r \cos \alpha \quad (9.13)$$

$$y = r \sin \alpha \quad (9.14)$$

$$x_1 = r \cos(\alpha - \varphi) \quad (9.15)$$

$$= r(\cos \alpha \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha)$$

$$= r \cos \alpha \cos \varphi + r \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi \quad (9.16)$$

Substituindo (9.13) e (9.14) em (9.16),

$$x_1 = x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi \quad (9.17)$$

De forma análoga,

$$y_1 = r \operatorname{sen}(\alpha - \varphi) \quad (9.18)$$

$$= r \operatorname{sen} \alpha \cos \varphi - r \operatorname{sen} \varphi \cos \alpha$$

$$= -r \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi + r \operatorname{sen} \alpha \cos \varphi \quad (9.19)$$

$$y_1 = -x \operatorname{sen} \varphi + y \cos \varphi \quad (9.20)$$

Para o eixo z, não temos modificação

$$z_1 = z \quad (9.21)$$

Podemos representar as equações (9.17), (9.20) e (9.21) da forma matricial [equação (9.12)]

$$\vec{X}_1 = R_1 \vec{X} \quad (9.22)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi & 0 \\ -\operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (9.23)$$

Esse resultado poderia ser obtido de forma bem simples se observarmos que a transformação de xyz para x_1y_1z é uma rotação nas coordenadas xy mantendo z invariante (a rotação é em torno do eixo z), cuja matriz de transformação foi obtida no capítulo 4 [equação (4.98)].

2ª rotação – R_2

Rotação anti-horária em torno do eixo- x_1 , com ângulo θ , conforme figura 9-6. A matriz transformação dessa rotação é dada por

$$\vec{X}_2 = R_2 \vec{X}_1 \quad (9.24)$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ 0 & -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (9.25)$$

A interseção dos planos xy e x_2y_2 define uma linha denominada de linha dos nodos (veja a figura 9-6).

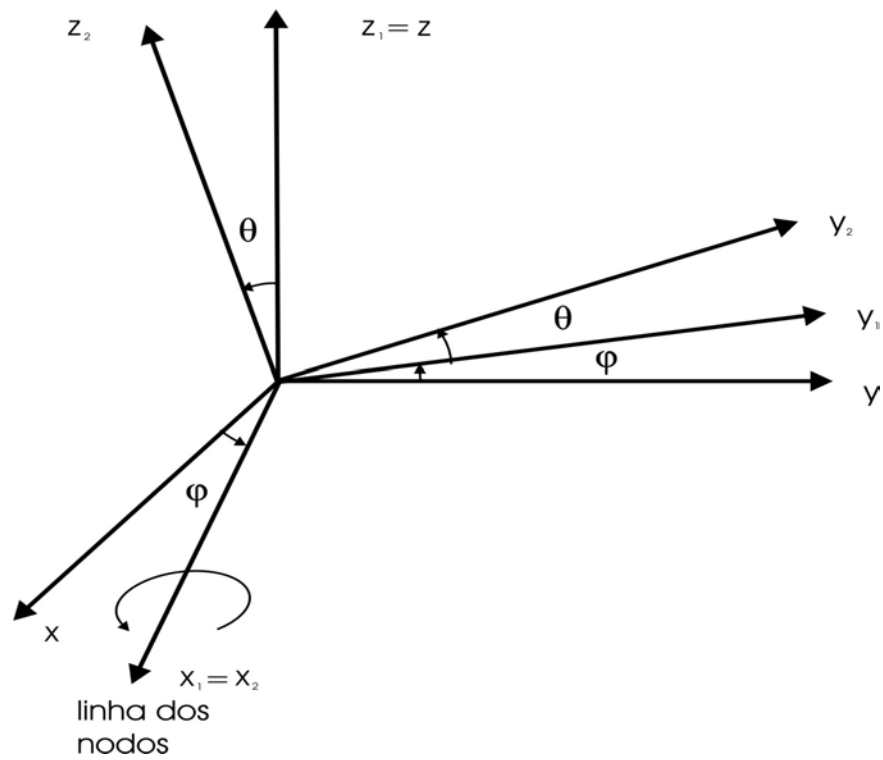


Figura 9-6

3ª rotação – R_3

Rotação anti-horária em torno do eixo- z_2 , com ângulo ψ , conforme figura 9-7

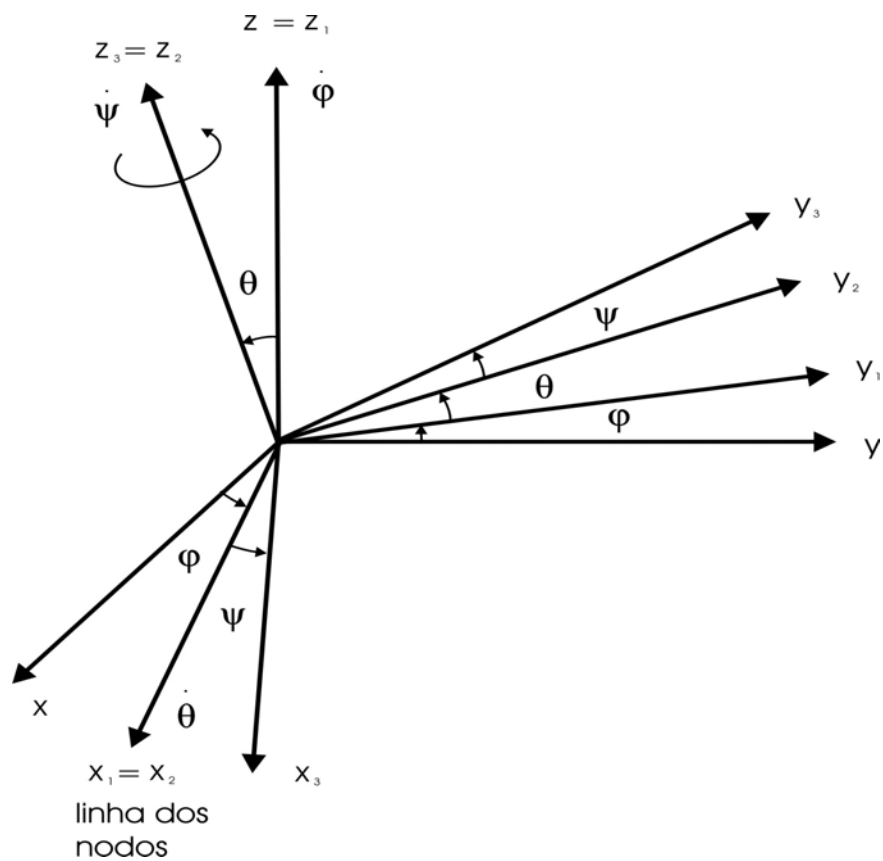


Figura 9-7

A equação matricial será dada por

$$\vec{X}_3 = R_3 \vec{X}_2 \quad (9.26)$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen} \psi & 0 \\ -\text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (9.27)$$

Para obtermos a transformação total R , dada pela equação (9.12), basta substituímos as equações (9.22) e (9.24) em (9.26)

$$\vec{X}_3 = R_3 \vec{X}_2 \quad (9.28)$$

$$= R_3 R_2 \vec{X}_1 \quad (9.29)$$

$$= R_3 R_2 R_1 \vec{X} = \vec{X}' \quad (9.30)$$

$$\vec{X}' = R \vec{X} \quad (9.31)$$

onde R é a matriz produto

$$R = R_3 R_2 R_1 \quad (9.32)$$

Substituindo os valores de R_1 , R_2 e R_3 , dados pelas equações (9.23), (9.25) e (9.27), teremos

$$R = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen} \psi & 0 \\ -\text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta \\ 0 & -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \text{sen} \varphi & 0 \\ -\text{sen} \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.33)$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen} \psi & 0 \\ -\text{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \text{sen} \varphi & 0 \\ -\cos \theta \text{sen} \varphi & \cos \theta \cos \varphi & \text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta \text{sen} \varphi & -\text{sen} \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9.34)$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \text{sen} \psi \cos \theta \text{sen} \varphi & \cos \psi \text{sen} \varphi + \text{sen} \psi \cos \theta \cos \varphi & \text{sen} \psi \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \theta \text{sen} \varphi & -\text{sen} \psi \text{sen} \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & \cos \psi \text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta \text{sen} \varphi & -\text{sen} \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9.35)$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \quad (9.36)$$

onde

$$r_{11} = \cos \psi \cos \varphi - \text{sen} \psi \cos \theta \text{sen} \varphi \quad (9.37)$$

$$r_{12} = \cos \psi \text{sen} \varphi + \text{sen} \psi \cos \theta \cos \varphi \quad (9.38)$$

$$r_{13} = \text{sen} \psi \text{sen} \theta \quad (9.39)$$

$$r_{21} = -\text{sen}\psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \theta \text{sen}\psi \quad (9.40)$$

$$r_{22} = -\text{sen}\psi \text{sen}\varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi \quad (9.41)$$

$$r_{23} = \cos \psi \text{sen}\theta \quad (9.42)$$

$$r_{31} = \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \quad (9.43)$$

$$r_{32} = -\text{sen}\theta \cos \varphi \quad (9.44)$$

$$r_{33} = \cos \theta \quad (9.45)$$

Para obtermos a transformação inversa, isto é, para passarmos de $\vec{X}'$ para $\vec{X}$, basta fazermos a transformação inversa da equação (9.31)

$$\vec{X} = R^{-1} \vec{X}' \quad (9.46)$$

Por R ser ortogonal,

$$R^{-1} = R^t$$

Assim,

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{pmatrix} \quad (9.47)$$

com r_{ij} dados pelas equações de (9.37) a (9.45).

9-4 UM VETOR NO REFERENCIAL DO CORPO RÍGIDO E SUA RELAÇÃO COM O REFERENCIAL INERCIAL

Escolhidos os sistemas de coordenadas que serão usados na descrição do movimento do corpo rígido, procuraremos nessa seção obtermos a relação entre vetores quando se passa de um referencial para outro.

Como já foi citado, o movimento mais geral de um corpo rígido seria a combinação do movimento de rotação com o de translação. O movimento de translação já foi amplamente estudado nos capítulos precedentes. Enfatizaremos agora apenas os efeitos de rotação.

Usualmente, escolheremos a origem do sistema de coordenadas do corpo rígido no centro de massa deste, com o eixo de rotação passando pelo centro de massa. Nosso problema consiste em obtermos a relação de um vetor genérico $\vec{A}$, fixo em relação ao referencial do corpo rígido, considerando que este corpo rígido gire com velocidade

angular $\vec{\omega}$, quando visto de um referencial inercial. Esse problema foi parcialmente resolvido no capítulo 4 (equação 4.21),

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\text{fixo}} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (9.49)$$

onde a velocidade angular $\vec{\omega}$ deve ser escrita em função dos ângulos de Euler e suas derivadas. Para isso, associamos a $\vec{\omega}$ 3 rotações infinitesimais, com velocidades dadas por

$$\omega_{\varphi} = \dot{\varphi} \quad (9.50)$$

$$\omega_{\theta} = \dot{\theta} \quad (9.51)$$

$$\omega_{\psi} = \dot{\psi} \quad (9.52)$$

Devemos lembrar que a velocidade angular tem a direção do eixo de rotação, que é convencionado positivo para rotações dextróginas.

Da figura 9-7, vemos que as componentes de $\dot{\varphi}$, no referencial xyz são dadas por

$$\dot{\varphi}_x = 0 \quad (9.53)$$

$$\dot{\varphi}_y = 0 \quad (9.54)$$

$$\dot{\varphi}_z = \dot{\varphi} \quad (9.55)$$

Para obtermos $\dot{\varphi}$ no referencial $x_3y_3z_3$, basta aplicarmos a matriz R [equação (9.36)] a $\dot{\varphi}$, isto é,

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{x_3} \\ \dot{\varphi}_{y_3} \\ \dot{\varphi}_{z_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (9.56)$$

Assim,

$$\dot{\varphi}_{x_3} = r_{13} \dot{\varphi} = \sin\psi \sin\theta \dot{\varphi} \quad (9.57)$$

$$\dot{\varphi}_{y_3} = r_{23} \dot{\varphi} = \cos\psi \sin\theta \dot{\varphi} \quad (9.58)$$

$$\dot{\varphi}_{z_3} = r_{33} \dot{\varphi} = \cos\theta \dot{\varphi} \quad (9.59)$$

Para obtermos $\dot{\theta}$, no referencial $x_3y_3z_3$, basta aplicarmos a matriz R_3 [equação (9.26)] a $\dot{\theta}$, cuja única componente diferente de zero tem a direção da linha dos nodos, isto é,

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_{x_3} \\ \dot{\theta}_{y_3} \\ \dot{\theta}_{z_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.60)$$

Assim,

$$\dot{\theta}_{x_3} = \cos \psi \dot{\theta} \quad (9.61)$$

$$\dot{\theta}_{y_3} = -\sin \psi \dot{\theta} \quad (9.62)$$

$$\dot{\theta}_{z_3} = 0 \quad (9.63)$$

No referencial $x_3y_3z_3$, $\dot{\psi}$ tem apenas a componente z_3 , não precisando de nenhuma transformação, isto é,

$$\dot{\psi}_{x_3} = 0 \quad (9.64)$$

$$\dot{\psi}_{y_3} = 0 \quad (9.65)$$

$$\dot{\psi}_{z_3} = \dot{\psi} \quad (9.66)$$

Das equações (9.57)-(9.59), (9.61)-(9.63) e (9.64)-(9.66), podemos obter $\vec{\omega}$ em função de suas componentes

$$\vec{\omega} = \omega_{x_3} \vec{i} + \omega_{y_3} \vec{j} + \omega_{z_3} \vec{k} \quad (9.67)$$

onde

$$\omega_{x_3} = \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \quad (9.68)$$

$$\omega_{y_3} = \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi \quad (9.69)$$

$$\omega_{z_3} = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (9.70)$$

solucionando assim o problema colocado nessa seção.

Resolvidos os problemas cinemáticos, abordaremos nas próximas seções os problemas dinâmicos.

9-5 ENERGIA CINÉTICA, MOMENTO ANGULAR E TORQUE

Consideremos um corpo rígido composto de n partículas (discretas) de massa m_α ($\alpha=1, 2, 3, \dots, n$), que gira com velocidade angular $\vec{\omega}$ em torno do eixo que passa pelo centro de massa, conforme mostra a figura 9-8.

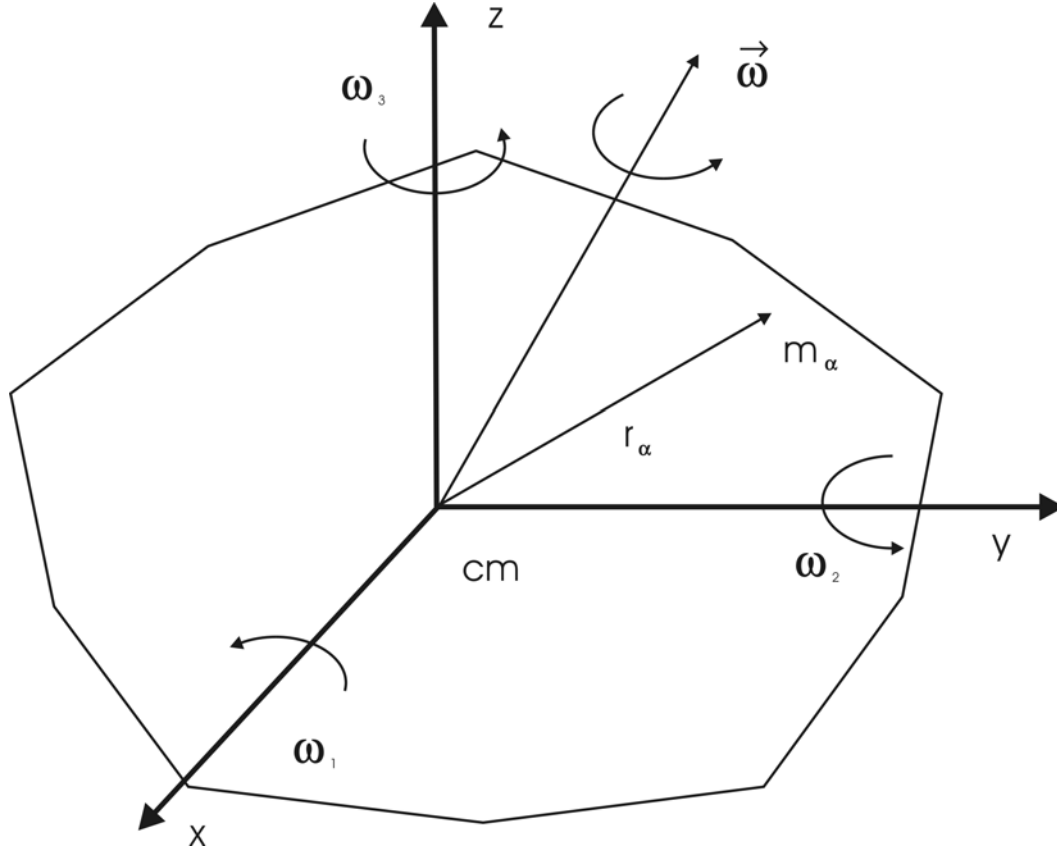


Figura 9-8

A energia cinética da partícula α é dada por

$$T_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \quad (9.71)$$

Para obtermos o valor para o corpo rígido, devemos somar sobre todas as partículas

$$T = \sum_\alpha T_\alpha \quad (9.72)$$

$$T = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \quad (9.73)$$

Da equação (9.49), teremos

$$v_\alpha = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha \quad (9.74)$$

Substituindo (9.74) em (9.73),

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 \quad (9.75)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}^2 + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 \quad (9.76)$$

Em relação ao primeiro termo de (9.76), teremos

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}^2 = \frac{1}{2} \vec{v} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \quad (9.77)$$

$$= \frac{1}{2} M \vec{v}^2 \quad (9.78)$$

onde M é a massa total do corpo. Observando esse termo vemos que este representa a energia cinética de translação do centro de massa. Em relação ao segundo termo

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) = \vec{v} \cdot \left[\vec{\omega} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \right] \quad (9.79)$$

como a origem do sistema de coordenadas está localizada no centro de massa,

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} = 0 \quad (9.80)$$

conforme a equação (2.73). O terceiro termo

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 \quad (9.81)$$

representa a energia cinética de rotação do corpo em relação ao centro de massa. Assim,

$$T = T_{trans} + T_{rot} \quad (9.82)$$

onde

$$T_{trans} = \frac{1}{2} M \vec{v}^2 \quad (9.83)$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 \quad (9.84)$$

Usando a identidade vetorial

$$(\vec{A} \times \vec{B})^2 = \vec{A}^2 \vec{B}^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 \quad (9.85)$$

podemos escrever o termo

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 = \vec{\omega}^2 \vec{r}_{\alpha}^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\alpha})^2 \quad (9.86)$$

Os vetores $\vec{r}_{\alpha}$ e $\vec{\omega}$ podem ser escritos em termo de suas componentes

$$\vec{r}_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha} (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3}) \quad (9.87)$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad (9.88)$$

De (9.88), (9.87) e (9.86), a energia cinética de rotação do corpo rígido [equação (9.84)] pode ser reescrita da forma

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\sum_i \omega_i^2 \right) \left(\sum_k x_{\alpha k}^2 \right) - \left(\sum_i \omega_i x_{\alpha i} \right) \left(\sum_j \omega_j x_{\alpha j} \right) \right] \quad (9.89)$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{i,j} m_{\alpha} \left[\omega_i \omega_j \delta_{ij} \left(\sum_k x_{\alpha k}^2 \right) - \omega_i \omega_j x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right] \quad (9.90)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \left(\sum_k x_{\alpha k}^2 \right) - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right] \quad (9.91)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j I_{ij} \quad (9.92)$$

onde

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha k}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right) \quad (9.93)$$

Vale ressaltar que a equação (9.92) é mais genérica que a equação

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (9.94)$$

que nos dá a energia cinética de rotação em tratamentos mais elementares da Mecânica. Nesta equação, I é uma grandeza escalar (o momento de inércia em relação ao eixo de rotação) e ω é a velocidade angular de rotação.

Na equação (9.92), os nove elementos I_{ij} formam uma grandeza similar a uma matriz 3x3, denominada de tensor de inércia $\vec{\mathbf{I}}$, que tem dimensão de $(\text{massa}) \times (\text{comprimento})^2$.

Tensores são grandezas mais genéricas, que obedecem determinadas regras de transformação de coordenadas. Mostraremos na seção 5 algumas de suas propriedades.

O tensor de inércia $\vec{\mathbf{I}}$ é representado pela matriz 3x3

$$\vec{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \quad (9.95)$$

cujos valores I_{ij} podem ser obtidos através da equação (9.93). Sendo assim,

$$I_{11} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(x_{\alpha 1}^2 + x_{\alpha 2}^2 + x_{\alpha 3}^2) - x_{\alpha 1}^2 \right] \quad (9.96)$$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha 2}^2 + x_{\alpha 3}^2) \quad (9.97)$$

$$I_{12} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (-x_{\alpha 1} x_{\alpha 2}) \quad (9.98)$$

$$I_{13} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (-x_{\alpha 1} x_{\alpha 3}) \quad (9.99)$$

$$I_{21} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (-x_{\alpha 2} x_{\alpha 1}) \quad (9.100)$$

$$I_{22} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(x_{\alpha 1}^2 + x_{\alpha 2}^2 + x_{\alpha 3}^2) - x_{\alpha 2}^2] \quad (9.101)$$

$$I_{22} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha 1}^2 + x_{\alpha 3}^2) \quad (9.102)$$

$$I_{23} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (-x_{\alpha 2} x_{\alpha 3}) \quad (9.103)$$

$$I_{31} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (-x_{\alpha 3} x_{\alpha 1}) \quad (9.104)$$

$$I_{32} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (-x_{\alpha 3} x_{\alpha 2}) \quad (9.105)$$

$$I_{33} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(x_{\alpha 1}^2 + x_{\alpha 2}^2 + x_{\alpha 3}^2) - x_{\alpha 3}^2] \quad (9.106)$$

$$I_{33} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha 1}^2 + x_{\alpha 2}^2) \quad (9.107)$$

Apesar de elegante e compacta, a notação utilizada fica um pouco carregada. Mudando a notação para as componentes de $(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3})$ para $(x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha})$ e considerando que

$$x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 = r_{\alpha}^2 \quad (9.108)$$

podemos reescrever as componentes de $\vec{I}$ da forma

$$I_{11} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 - x_{\alpha}^2) = I_{xx} \quad (9.109)$$

$$I_{12} = -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} = I_{xy} \quad (9.110)$$

$$I_{13} = -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} = I_{xz} \quad (9.111)$$

$$I_{21} = -\sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} x_{\alpha} = I_{yx} \quad (9.112)$$

$$I_{22} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 - y_{\alpha}^2) = I_{yy} \quad (9.113)$$

$$I_{23} = -\sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} = I_{yz} \quad (9.114)$$

$$I_{31} = -\sum_{\alpha} m_{\alpha} z_{\alpha} x_{\alpha} = I_{zx} \quad (9.115)$$

$$I_{32} = -\sum_{\alpha} m_{\alpha} z_{\alpha} y_{\alpha} = I_{zy} \quad (9.116)$$

$$I_{33} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (r_{\alpha}^2 - z_{\alpha}^2) = I_{zz} \quad (9.117)$$

Os elementos da diagonal principal $I_{11}(I_{xx})$, $I_{22}(I_{yy})$ e $I_{33}(I_{zz})$ são denominados de momentos de inércia em relação aos eixos (x_1, x_2, x_3) , ou (x, y, z) da segunda notação. O negativo dos elementos fora da diagonal principal $I_{12}, I_{13}, \dots, I_{32}$ ($I_{xy}, I_{xz}, \dots, I_{zy}$), são denominados de produtos de inércia. Devemos observar que o tensor de inércia é simétrico, isto é,

$$I_{ij} = I_{ji} \quad (9.118)$$

fazendo com que apenas seis dos nove elementos que o compõe sejam linearmente independente..

Para uma distribuição contínua de massa, podemos escrever a equação (9.93) da forma

$$I_{ij} = \int_V \rho(\vec{r}) \left(\delta_{ij} \sum_k x_k^2 - x_i x_j \right) dV \quad (9.119)$$

onde $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ representa o elemento infinitesimal de volume.

Veremos agora como representar o momento angular. O momento angular tomado em relação a origem para a partícula α , no referencial do corpo rígido, será

$$\vec{L}_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} \quad (9.120)$$

Para o corpo rígido, devemos somar sobre todas as partículas

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} \quad (9.121)$$

No sistema de coordenadas do corpo rígido, o momento será

$$\vec{p}_{\alpha} = m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \quad (9.122)$$

$$= m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) \quad (9.123)$$

Substituindo (9.123) em (9.121),

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) \quad (9.124)$$

O produto triplo vetorial pode ser escrito da forma

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (9.125)$$

Aplicando (9.125) a (9.124),

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{\omega} (\vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha}) - \vec{r}_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{\omega})] \quad (9.126)$$

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha}^2 \vec{\omega} - \vec{r}_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{\omega})] \quad (9.127)$$

A componente i do “vetor” $\vec{L}$, L_i , pode ser escrita da forma

$$L_i = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\omega_i \sum_k x_{\alpha k}^2 - x_{\alpha i} \left(\sum_j x_{\alpha j} \omega_j \right) \right] \quad (9.128)$$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\sum_j \omega_j \delta_{ij} \sum_k x_{\alpha k}^2 - \sum_j \omega_j x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right] \quad (9.129)$$

Trocando a ordem dos somatórios

$$L_i = \sum_j \omega_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha k}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right] \quad (9.130)$$

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j \quad (9.131)$$

que é a generalização da equação

$$L = I \omega = I \dot{\theta} \quad (9.132)$$

encontrada em textos elementares de Mecânica.

Utilizando a notação tensorial apresentada anteriormente, podemos escrever $\vec{L}$ da forma

$$\vec{L} = \vec{\mathbf{I}} \cdot \vec{\omega} \quad (9.133)$$

Essa equação pode ser pensada da seguinte forma: o operador $\vec{\mathbf{I}}$ (tensor momento de inércia) atuando no vetor velocidade angular $\vec{\omega}$, dá uma nova quantidade $\vec{L}$ (momento angular), fisicamente diferente. Devemos observar que o momento angular, em geral, não terá a mesma direção da velocidade angular. Isso é verificado claramente quando analisamos o problema de um alferes rotacionando, conforme mostra a figura 9-9. Sabemos que

$$\vec{v}_{\alpha} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha} \quad (9.134)$$

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha}) \quad (9.135)$$

$\vec{\omega}$ tem a direção do eixo de rotação e $\vec{L}$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{r}_{\alpha}$ e $\vec{v}_{\alpha}$, demonstrando assim a nossa asserção. Observando esse sistema, verificamos que $\vec{L}$ não permanece constante no tempo. Na verdade, $\vec{L}$ rotaciona com velocidade angular $\vec{\omega}$,

traçando um cone cujo eixo é o eixo de rotação. Como $\vec{L}$ não é constante, para que esse sistema se mantenha em movimento, é necessário que um torque externo seja aplicado, de modo que

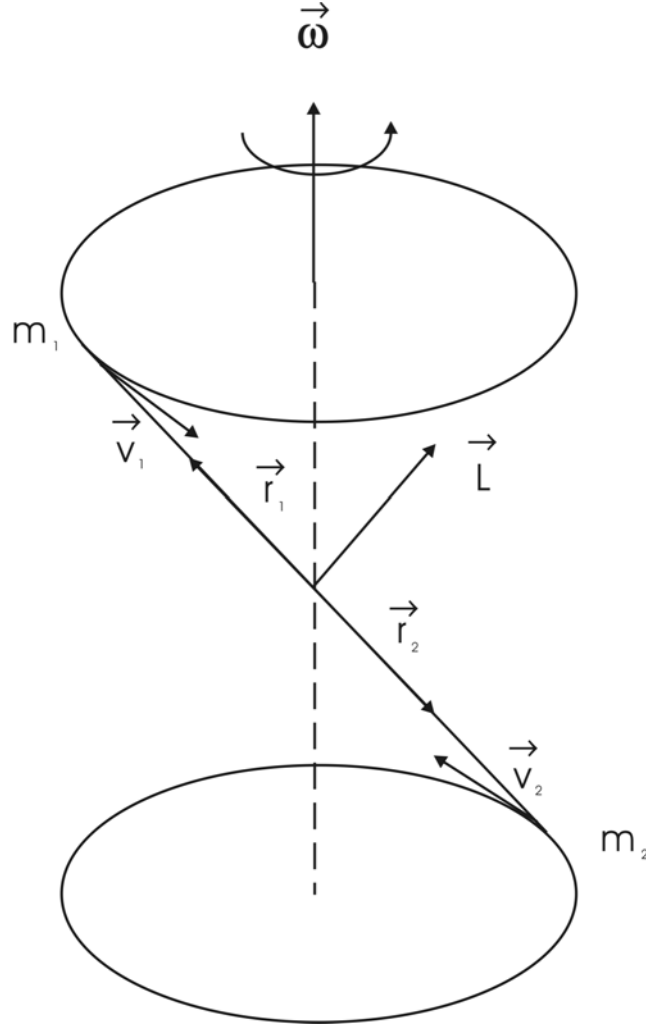


Figura 9-9

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (9.136)$$

Observando a equação (9.131), vemos que

$$\frac{1}{2} \sum_i \omega_i L_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i I_{ij} \omega_j \quad (9.137)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \omega_j I_{ij} = T_{rot} \quad (9.138)$$

Assim, podemos escrever esta equação da forma vetorial e matricial como

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^t \cdot \vec{L} \quad (9.139)$$

De (9.138) e (9.133),

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^t \cdot \vec{\mathbf{I}} \cdot \vec{\omega} \quad (9.140)$$

Vejamos agora como montar a equação de movimento referente a rotação do corpo rígido em torno do seu centro de massa ou em relação a um ponto fixo. Das equações (9.136) e (9.133),

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt} (\vec{\mathbf{I}} \cdot \vec{\omega}) \quad (9.141)$$

Tomando a componente j de (9.141),

$$\tau_j = \sum_k \frac{d}{dt} (I_{jk} \omega_k) \quad (9.142)$$

e considerando que o movimento de rotação seja feito em torno de um eixo fixo, cuja direção é a do eixo z , isto é,

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} \quad (9.143)$$

teremos que as componentes do momento angular, equação (9.131), serão dadas por

$$L_x = I_{xz} \omega_z \quad (9.144)$$

$$L_y = I_{yz} \omega_z \quad (9.145)$$

$$L_z = I_{zz} \omega_z \quad (9.146)$$

A equação (9.111) nos mostra que

$$I_{xz} = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha}$$

Como o corpo é simétrico em relação ao eixo- z teremos massas m_{α} em z_{α} e $-z_{\alpha}$, assim,

$$I_{xz} = -m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} + m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} = 0 \quad (9.147)$$

Da equação (9.114) e utilizando os mesmos argumentos,

$$I_{yz} = 0 \quad (9.148)$$

Da equação (9.117),

$$I_{zz} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \quad (9.149)$$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} R_{\alpha}^2 \quad (9.150)$$

onde

$$R_{\alpha}^2 = x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 \quad (9.151)$$

isto é, R_α é a distância do eixo de rotação à partícula de massa m_α , tomada em uma direção perpendicular ao referido eixo. Das equações (9.147), (9.148) e (9.150), teremos apenas a componente **z** do momento angular diferente de zero

$$L_z = I_{zz}\omega_z \quad (9.152)$$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} R_{\alpha}^2 \omega_z \quad (9.153)$$

Nesse caso restrito, corpo simétrico em relação ao eixo de rotação, $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ são paralelos.

Em relação ao torque, equação (9.142), teremos

$$\tau_x = \frac{dL_x}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{xz}\omega_z) = 0 \quad (9.154)$$

$$\tau_y = \frac{dL_y}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{yz}\omega_z) = 0 \quad (9.155)$$

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{zz}\omega_z) = I_{zz}\dot{\omega}_z \quad (9.156)$$

Um dos problemas mais simples envolvendo corpos rígidos consiste no movimento de um corpo rígido de formato arbitrário suspenso e livre para oscilar em torno de um eixo que não passa pelo centro de massa, sob a ação da gravidade, que recebe a denominação de pêndulo composto. A figura 9-10 ilustra esse problema.

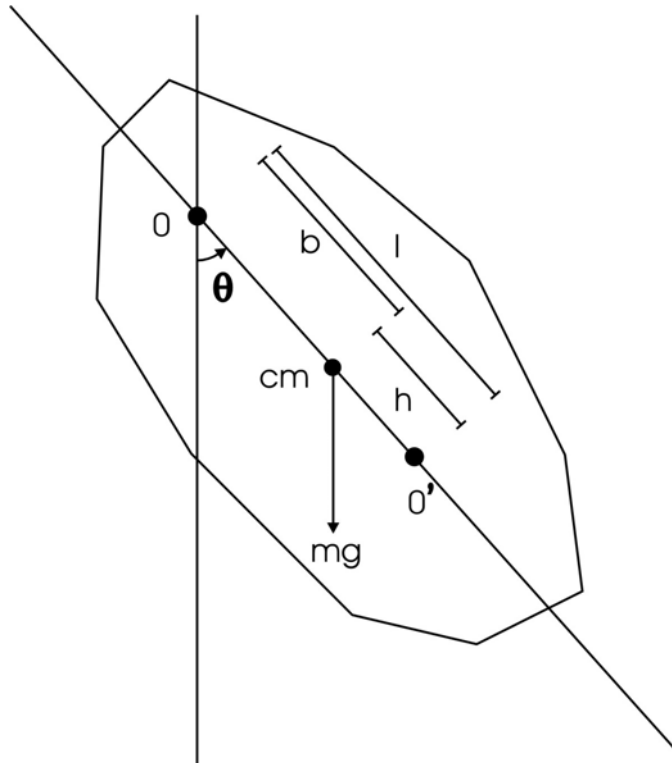


Figura 9-10

Como a força que atua no corpo rígido é a força da gravidade, que por sua vez independe da orientação deste no espaço, podemos aplicar os métodos elementares para solucionar o problema

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (9.157)$$

$$-mgbsen\theta = I\ddot{\theta} \quad (9.158)$$

O sinal é negativo porque o torque produz rotação no sentido que diminui o ângulo θ .

Para pequenos ângulos,

$$sen\theta \simeq \theta \quad (9.159)$$

o que simplifica nossa equação de movimento

$$I\ddot{\theta} + mgb\theta = 0 \quad (9.160)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgb}{I}\theta = 0 \quad (9.161)$$

Fazendo

$$\omega_0^2 = \frac{mgb}{I} \quad (9.162)$$

teremos

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (9.163)$$

cuja solução é formalmente idêntica ao oscilador harmônico simples. Assim,

$$\theta = A sen(\omega_0 t \pm \delta) \quad (9.164)$$

A e δ representam a amplitude e a fase, que são determinadas pelas condições iniciais. A frequência de oscilação (ν_0) é dada por

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (9.165)$$

Tomando ω_0 dado pela equação (9.162),

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{mgb}{I} \right)^{1/2} \quad (9.166)$$

Para o período de oscilação (T_0),

$$T_0 = \frac{1}{\nu_0} \quad (9.167)$$

$$T_0 = 2\pi \left(\frac{I}{mgb} \right)^{1/2} \quad (9.168)$$

Comparando com o período do pêndulo simples

$$T = 2\pi \left(\frac{l}{g} \right)^{1/2} \quad (9.169)$$

e igualando os termos semelhantes

$$\frac{g}{l} = \frac{mgb}{I} \quad (9.170)$$

teremos

$$l = \frac{I}{mb} \quad (9.171)$$

que nos fornece a seguinte interpretação: o pêndulo composto é formalmente equivalente a um pêndulo simples, quando colocamos toda a sua massa em um ponto a uma distância l da origem (o ponto O da figura 9-10).

Um outro problema interessante a ser resolvido é o do alteres girante (figura 9-9), já abordado nessa seção. Consideremos que as massas sejam iguais; a velocidade angular $\vec{\omega}$ e o ângulo de inclinação θ sejam constantes e a distância do ponto fixo (origem) a cada uma das massas sejam iguais a r , conforme mostra a figura 9-11

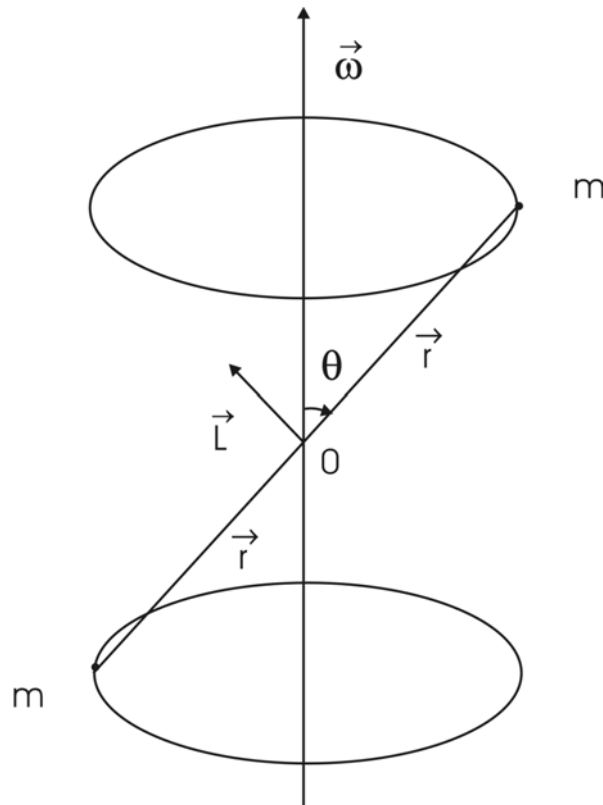


Figura 9-11

Nosso problema consiste em determinarmos o momento angular e o torque para que esse movimento seja possível.

Escolhendo o eixo-z na direção de $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} \quad (9.172)$$

podemos decompor $\vec{\omega}$ conforme a figura 9-12

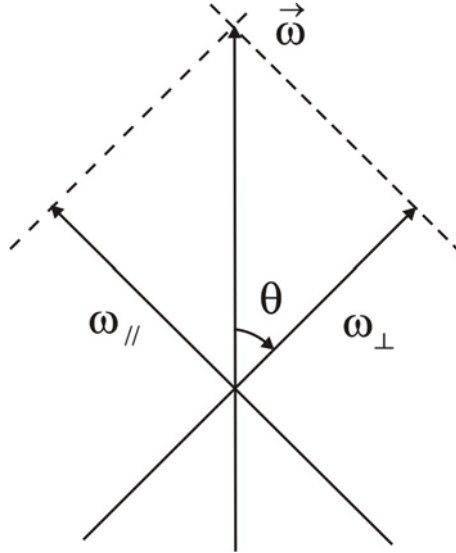


Figura 9-12

onde

$$\omega_{//} = \omega \sin \theta \quad (9.173)$$

$$\omega_{\perp} = \omega \cos \theta \quad (9.174)$$

Observe que apenas $\omega_{\perp}$ produz momento angular. Tomando o momento de inércia em relação a um eixo que tem a mesma direção de $\omega_{\perp}$, teremos

$$I = 2mr^2 \quad (9.175)$$

de modo que o momento angular será dado por

$$L = I \omega_{\perp} \quad (9.176)$$

$$= 2mr^2 \omega \cos \theta \quad (9.177)$$

A equação (9.177) nos dá o módulo de $\vec{L}$. O vetor $\vec{L}$ descreve um cone, com eixo na direção $\mathbf{z}$, de modo que podemos fazer sua decomposição, como mostra a figura 9-13.

Vemos que

$$L_z = L \cos \theta \quad (9.178)$$

e que L_H representa a componente de $\vec{L}$ no plano-xy. Escolhendo que em $t=0$, L_H coincide com o eixo-x, teremos que as componentes x e y de L_H serão dadas por

$$L_x = L_H \cos \omega t \quad (9.179)$$

$$= L \sin \theta \cos \omega t \quad (9.180)$$

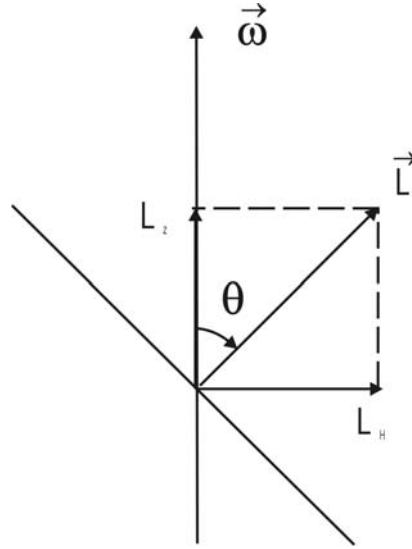


Figura 9-13

$$L_y = L_H \sin \omega t \quad (9.181)$$

$$= L \sin \theta \sin \omega t \quad (9.182)$$

Das equações (9.178), (9.180) e (9.182), podemos escrever $\vec{L}$ da forma

$$\vec{L} = L \sin \theta \cos \omega t \vec{i} + L \sin \theta \sin \omega t \vec{j} + L \cos \theta \vec{k} \quad (9.183)$$

Para obtermos o torque [equação (9.157)] devemos derivar (9.183)

$$\vec{\tau} = -L \omega \sin \theta \sin \omega t \vec{i} + L \omega \sin \theta \cos \omega t \vec{j} \quad (9.184)$$

cujo módulo será dado por

$$\tau = [\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}]^{1/2} \quad (9.185)$$

$$= \left[L^2 \omega^2 (\sin \theta)^2 (\sin \omega t)^2 + L^2 \omega^2 (\sin \theta)^2 (\cos \omega t)^2 \right]^{1/2}$$

$$\begin{aligned} \tau &= L \omega \sin \theta \left[(\sin \omega t)^2 + (\cos \omega t)^2 \right]^{1/2} \\ &= L \omega \sin \theta \end{aligned} \quad (9.186)$$

Observe, na equação (9.184), que o torque externo não tem componente na direção $\mathbf{z}$.

9-6 O TENSOR DE INÉRCIA

Na seção anterior apresentamos o tensor de inércia. Aqui, veremos como este se comporta sob a ação de uma transformação de coordenadas e algumas de suas propriedades gerais. Por simplicidade, trabalharemos apenas com sistemas de coordenadas retangulares.

Vimos que a componente k do momento angular é dada por [equação (9.131)]

$$L_k = \sum_l I_{kl} \omega_l \quad (9.187)$$

Em um sistema de coordenadas rotacionado em relação ao primeiro, teremos que

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j \quad (9.188)$$

No capítulo 1 vimos que vetores obedecem à seguinte regra de transformação [equação (1.35)]

$$x_i' = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} x_j$$

Para a transformação inversa teremos

$$x_i = \sum_j \lambda_{ji} x_j' \quad (9.189)$$

Sendo assim, teremos que L_k e L_m obedecerão à seguinte regra de transformação

$$L_k = \sum_m \lambda_{mk} L_m' \quad (9.190)$$

Para ω_l e ω_j' , teremos

$$\omega_l = \sum_j \lambda_{jl} \omega_j' \quad (9.191)$$

Substituindo (9.190) e (9.191) em (9.187)

$$\sum_m \lambda_{mk} L_m' = \sum_l I_{kl} \sum_j \lambda_{jl} \omega_j' \quad (9.192)$$

Multiplicando a equação anterior por λ_{ik} e somando sobre k , teremos

$$\sum_m \left(\sum_k \lambda_{ik} \lambda_{mk} \right) L_m' = \sum_j \left(\sum_{l,k} I_{kl} \lambda_{ik} \lambda_{jl} \right) \omega_j' \quad (9.193)$$

$$\sum_m \delta_{im} L_m' = \sum_j \left(\sum_{l,k} I_{kl} \lambda_{ik} \lambda_{jl} \right) \omega_j' \quad (9.194)$$

$$L_i = \sum_j \left(\sum_{l,k} I_{kl} \lambda_{ik} \lambda_{jl} \right) \omega_j \quad (9.195)$$

Comparando (9.195) com (9.188), vemos que

$$\sum_{k,l} I_{kl} l_{ik} l_{jl} = I_{ij} \quad (9.196)$$

Grandezas que se transformam de acordo com a regra de transformação (9.196) são denominadas de tensores de segunda ordem. A ordem do tensor é dada pelo número de índices não somados (índices livres). No caso da equação (9.196) temos 2 índices – i e j .

De forma geral, um tensor tridimensional cartesiano de ordem n é definido como uma quantidade que tem 3^n componentes $T_{ijk\dots}$, com n índices, que se comporta sob a ação de uma transformação de coordenadas ortogonais da seguinte forma

$$T_{ijk\dots} = \sum_{l,m,n,\dots} l_{il} l_{jm} l_{kn} \dots T_{lmn\dots} \quad (9.197)$$

Dessa definição vemos que:

1 – Um escalar é um tensor de ordem zero que tem uma componente, sendo invariante por uma transformação ortogonal

$$T = T' \quad (9.198)$$

2 – Um tensor de primeira ordem tem três componentes, e sob transformação de coordenadas se comporta da forma

$$T_i = \sum_j l_{ij} T'_j \quad (9.199)$$

que é exatamente a regra de transformação de vetores. Isto é, vetor é um tensor de ordem um.

3 – Um tensor de segunda ordem tem nove componentes que obedecem à seguinte regra de transformação

$$T_{ij} = \sum_{k,l} l_{ik} l_{jl} T'_{kl} \quad (9.200)$$

A diferença entre tensores de segunda ordem e matrizes, consiste, basicamente, que grandezas tensoriais devem obedecer à transformação (9.200), enquanto matrizes, não têm nenhuma restrição quanto ao tipo de transformação que podem sofrer. Entretanto, considerando apenas transformações ortogonais, há uma completa identidade entre tensores e matrizes, de modo que essas grandezas podem ser manipuladas da mesma forma. Alguns livros utilizam a convenção de Einstein para grandezas tensoriais, onde se

convenciona que os índices repetidos são somados, isto é, o somatório não aparece. Nessa convenção a equação (9.197) tomaria a forma

$$T'_{ijk\dots} = \lambda_{il}\lambda_{jn}\lambda_{kn}\dots T_{lmn\dots} \quad (9.201)$$

Observando a equação (9.133), vemos que, para um sistema de coordenadas cartesianas, esta pode ser representada da forma matricial como

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (9.202)$$

onde os nove elementos da matriz I_{ij} formam um tensor de segunda ordem ($\vec{\mathbf{I}}$) que obedece à regra de transformação (9.200), e $\vec{\omega}$, um tensor de primeira ordem, a regra (9.199).

Vejamos agora algumas propriedades e operações com tensores. A equação (9.133)

$$\vec{L} = \vec{\mathbf{I}} \cdot \vec{\omega} \quad (9.133)$$

representada matricialmente pela equação (9.202), é o produto escalar de dois tensores ($\vec{\mathbf{I}}$ e $\vec{\omega}$), resultando em uma grandeza vetorial ($\vec{L}$). Isso pode ser entendido se observarmos que os 9 elementos I_{ij} podem ser formados pelo produto das componentes dos dois vetores

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3) \text{ e } \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$

$$I_{ij} = a_i b_j \quad (9.203)$$

Em notação vetorial, temos

$$\vec{\mathbf{I}} = \vec{a}\vec{b} \quad (9.204)$$

sem ponto, do produto escalar, ou cruz, do produto vetorial, que recebe o nome especial de produto externo ou produto tensorial. Vemos que o somatório dos elementos da diagonal principal da equação (9.203) é exatamente o produto escalar, e que o produto vetorial é formado pelos produtos dos elementos fora da diagonal principal. Fazendo agora o produto escalar do tensor $\vec{\mathbf{I}}$ com um vetor $\vec{\omega}$, teremos

$$\vec{\mathbf{I}} \cdot \vec{\omega} = (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{\omega} \quad (9.205)$$

$$\vec{\mathbf{I}} \cdot \vec{\omega} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{\omega}) \quad (9.206)$$

$$= \vec{L} \quad (9.207)$$

Como $(\vec{b} \cdot \vec{\omega})$ é um escalar e $\vec{a}$ é um tensor, e o produto de um escalar por um vetor é um vetor, $\vec{L}$ é um vetor. Tomando agora o produto escalar de um vetor $\vec{\omega}^t$ (o transposto de $\vec{\omega}$) com o vetor $\vec{L}$, teremos uma grandeza escalar T_{rot}

$$T_{rot} = \vec{\omega}^t \cdot \vec{L} \quad (9.208)$$

$$= \vec{\omega}^t \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} \quad (9.209)$$

conforme a equação (9.140). Vale ressaltar que a ordem dessas operações deve ser observada, pois, em geral,

$$\vec{\omega}^t \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} \neq \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega}^t \quad (9.210)$$

Para que a igualdade seja verificada, devemos operar da seguinte forma

$$\vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega}^t = \vec{\omega}^t \cdot \vec{I}^t \cdot \vec{\omega} \quad (9.211)$$

onde $\vec{I}^t$ é o transposto de $\vec{I}$. Como o tensor $\vec{I}$ é simétrico

$$\vec{I} = \vec{I}^t \quad (9.212)$$

a desigualdade (9.210) não é verificada.

Como $\vec{I}$ é um tensor simétrico, procuraremos agora determinar algumas propriedades desejáveis deste, de modo a direcionar a escolha do sistema de eixos coordenados adequado à orientação do corpo rígido. Das equações (9.93) e (9.131), se o tensor de inércia for diagonal e desconsiderando a convenção de Einstein, teremos que

$$I_{ij} = I_i \delta_{ij} \quad (9.213)$$

o momento angular será

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j \quad (9.214)$$

$$= \sum_j I_i \delta_{ij} \omega_j \quad (9.215)$$

$$= I_i \omega_i \quad (9.216)$$

e a energia cinética de rotação

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i \omega_i L_i \quad (9.217)$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \omega_i^2 \quad (9.218)$$

Vemos então que o momento angular e a energia cinética de rotação terão uma forma mais simples. Daí a idéia de diagonalizarmos o momento de inércia. Fazer isso significa

encontrarmos um sistema de eixos para os quais os produtos de inércia sejam nulos. Tal sistema constitui os “eixos principais de inércia”.

Considerando que um corpo rígido gira em torno de um eixo principal, com velocidade angular $\vec{\omega}$, seu momento angular, dirigido ao longo desse eixo será

$$\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega} \quad (9.219)$$

onde I é o momento de inércia em torno desse eixo. Escrevendo essa equação em termo de suas componentes, teremos

$$L_1 = I\omega_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 \quad (9.220)$$

$$L_2 = I\omega_2 = I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3 \quad (9.221)$$

$$L_3 = I\omega_3 = I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3 \quad (9.222)$$

Essas equações podem ser reescritas da forma

$$(I_{11} - I)\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 = 0 \quad (9.223)$$

$$I_{21}\omega_1 + (I_{22} - I)\omega_2 + I_{23}\omega_3 = 0 \quad (9.224)$$

$$I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + (I_{33} - I)\omega_3 = 0 \quad (9.225)$$

Temos um sistema de equações para ω_1 , ω_2 e ω_3 , que terá solução não trivial apenas quando o determinante for nulo, isto é,

$$\begin{vmatrix} I_{11} - I & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} - I & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} - I \end{vmatrix} = 0 \quad (9.226)$$

As soluções possíveis serão obtidas resolvendo-se a equação cúbica gerada, cujas raízes devem ser reais. Vejamos como demonstrar essa afirmação.

Seja $\vec{I}$ um tensor simétrico, com autovetor $\vec{\omega}$ e autovalor I

$$\vec{I} \cdot \vec{\omega} = I\vec{\omega} \quad (9.227)$$

Tomando o conjugado complexo de (9.227)

$$\vec{I}^* \cdot \vec{\omega}^* = I^* \vec{\omega}^* \quad (9.228)$$

Fazendo agora o produto escalar de (9.227) por $\vec{\omega}^*$ e de (9.228) por $\vec{\omega}$, teremos

$$\vec{\omega}^* \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} = I\vec{\omega}^* \cdot \vec{\omega} \quad (9.229)$$

$$\vec{\omega} \cdot \vec{I}^* \cdot \vec{\omega}^* = I^* \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}^* \quad (9.230)$$

Como $\vec{I}$ é real, conforme equação (9.93), podemos igualar as equações anteriores

$$I\vec{\omega}^* \cdot \vec{\omega} = I^* \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}^* \quad (9.231)$$

Como

$$\vec{\omega}^* \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}^* \quad (9.232)$$

teremos que

$$I = I^* \quad (9.233)$$

isto é, I é real.

Cada um dos autovetores (I_1 , I_2 e I_3), denominados de momentos principais de inércia, tem correspondência com seus autovalores $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ e $\vec{\omega}_3$, que são ortogonais entre si, se todas as raízes (I_1 , I_2 e I_3) forem distintas, conforme demonstraremos a seguir.

Seja I_m o momento principal de inércia, com autovetor $\vec{\omega}_m$. A componente i de $\vec{L}$ será

$$L_{im} = I_m \omega_{im} \quad (9.234)$$

Escrevendo L_i em termo do tensor de inércia (I_{ik}),

$$L_{im} = \sum_k I_{ik} \omega_{km} \quad (9.235)$$

Dessas equações

$$\sum_k I_{ik} \omega_{km} = I_m \omega_{im} \quad (9.236)$$

Equação similar pode ser escrita para a componente n do momento principal de inércia, isto é,

$$\sum_i I_{ki} \omega_{in} = I_n \omega_{kn} \quad (9.237)$$

Multiplicando (9.236) por ω_{in} e somando em i ,

$$\sum_{i,k} I_{ik} \omega_{km} \omega_{in} = \sum_i I_m \omega_{im} \omega_{in} \quad (9.238)$$

Multiplicando (9.237) por ω_{km} e somando em k ,

$$\sum_{i,k} I_{ki} \omega_{in} \omega_{km} = \sum_k I_n \omega_{kn} \omega_{km} \quad (9.239)$$

Como o momento de inércia é simétrico

$$I_{ki} = I_{ik} \quad (9.240)$$

podemos igualar (9.238) a (9.239)

$$\sum_i I_m \omega_{im} \omega_{in} = \sum_k I_n \omega_{kn} \omega_{km} \quad (9.241)$$

$$I_m \sum_i \omega_{im} \omega_{in} = I_n \sum_k \omega_{kn} \omega_{km} \quad (9.242)$$

Como i e k são índices sob a ação do somatório, podemos reescrever (9.242) da forma

$$(I_n - I_m) \sum_l \omega_{lm} \omega_{ln} = 0 \quad (9.243)$$

Por hipótese, $I_m \neq I_n$. Logo,

$$\sum_l \omega_{lm} \omega_{ln} = 0 \quad (9.244)$$

que da forma vetorial é escrita como

$$\vec{\omega}_m \cdot \vec{\omega}_n = 0 \quad (9.245)$$

Isto é, $\vec{\omega}_m$ e $\vec{\omega}_n$ são perpendiculares, em conformidade com nossa proposição.

Caso haja uma raiz dupla de modo que as raízes sejam I_3 e $I_1 = I_2$ teremos de (9.245) que

$$\vec{\omega}_3 \perp \vec{\omega}_1 \quad (9.246)$$

$$\vec{\omega}_3 \perp \vec{\omega}_2 \quad (9.247)$$

Entretanto nada podemos concluir sobre a relação angular entre $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$. Assim, $\vec{\omega}_3$ seria escolhido ao longo de um eixo de simetria. $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ permaneceriam em um plano perpendicular a $\vec{\omega}_3$. Sem perda de generalidade poderíamos escolher $\vec{\omega}_1 \perp \vec{\omega}_2$, de modo que até neste caso teríamos um sistema ortogonal cujos vetores unitários seriam dados por

$$\hat{e}_1 = \frac{\vec{\omega}_1}{\omega_1} \quad (9.248)$$

$$\hat{e}_2 = \frac{\vec{\omega}_2}{\omega_2} \quad (9.249)$$

$$\hat{e}_3 = \frac{\vec{\omega}_3}{\omega_3} \quad (9.250)$$

Nessa base, o tensor de inércia $\vec{\mathbf{I}}$ seria diagonal

$$\vec{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (9.251)$$

Em resumo, o determinante (9.226) nos fornece uma equação cúbica cujas raízes (momentos principais de inércia) correspondem aos momentos de inércia em relação a cada um dos eixos principais. Outro resultado importante é verificado através da equação (9.196)

$$I_{ij} = \sum_{k,l} I_{kl} \lambda_{ik} \lambda_{jl} = \sum_{l,k} \lambda_{ik} I_{kl} \lambda_{lj}^t \quad (9.252)$$

$$I'_{ij} = \sum_{l,k} \lambda_{ik} I_{kl} \lambda_{lj}^{-1} \quad (9.253)$$

Podemos interpretar essa equação da seguinte forma: cada um dos elementos I_{kl} do tensor de inércia $\vec{I}$, no sistema de coordenadas fixo, pode ser transformado por rotação para o sistema do corpo, com elementos I'_{ij} do tensor de inércia $\vec{I}'$. Transformações do tipo (9.253) são denominadas de transformações de similaridade. Assim, escolhido o tensor de inércia em relação a uma determinada origem, é sempre possível obtermos através de rotações dos eixos coordenados um novo sistema no qual o tensor de inércia é diagonal.

Caso o corpo rotacione em torno de um dos eixos principais, por exemplo, I_1 , o momento angular será

$$\vec{L} = I_1 \vec{\omega} \quad (9.254)$$

com $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ na mesma direção do eixo principal considerado. Substituindo o valor de I_1 por I no sistema de equações (9.223), (9.224) e (9.225), obtém-se a razão entre as componentes da velocidade angular $\vec{\omega}$

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 \quad (9.255)$$

determinando assim os cossenos diretores do eixo em relação ao qual o momento de inércia é I_1 . Procedimento similar pode ser adotado para obtermos os cossenos diretores de I_2 e I_3 .

Quando o problema envolvendo corpos rígidos trata de sólidos de forma regular, a análise da simetria do corpo possibilita a escolha adequada dos eixos principais. Como exemplo, tomemos um sólido de revolução em torno de um determinado eixo. Escolhe-se a origem do sistema de coordenadas no eixo de simetria do corpo, que suportará um dos eixos principais. Os outros dois serão escolhidos em um plano normal ao eixo de simetria. Nesse caso, as raízes serão I_3 e $I_1 = I_2$, isto é, teremos uma raiz dupla.

Alguns corpos, devido a sua simetria, recebem nomes especiais, em função dos valores dos momentos principais de inércia. Quando $I_1 = I_2 = I_3$, o corpo é denominado de pião esférico; quando $I_1 = I_2 \neq I_3$, de pião simétrico; quando $I_1 \neq I_2 \neq I_3$, pião assimétrico e quando $I_1 = 0$ e $I_2 = I_3$, de rotor.

Na seção 2 vimos que a escolha da origem do sistema de orientação do corpo rígido no centro de massa, em sistemas cujo eixo de rotação também passa pelo centro de massa, nos possibilita analisar os movimentos de rotação e translação de forma independente. Vimos também que o tensor de inércia é função tanto do ponto pelo qual o eixo de rotação

passa, quanto da orientação do corpo em relação ao referencial fixo (referencial inercial). Sendo assim, seria interessante sabermos como o tensor de inércia varia quando passamos do referencial do centro de massa do corpo rígido para um sistema de coordenadas paralelo a este.

Consideremos dois sistemas de coordenadas paralelos $oxyz$ e $OXYZ$, conforme mostra a figura 9-14. As componentes do tensor de inércia J_{ij} em relação ao sistema de coordenadas $OXYZ$ será dado por

$$J_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_k X_{\alpha k}^2 - X_{\alpha i} X_{\alpha j} \right] \quad (9.256)$$

Nosso problema consiste em escrevermos J_{ij} em função do sistema de coordenadas $oxyz$.

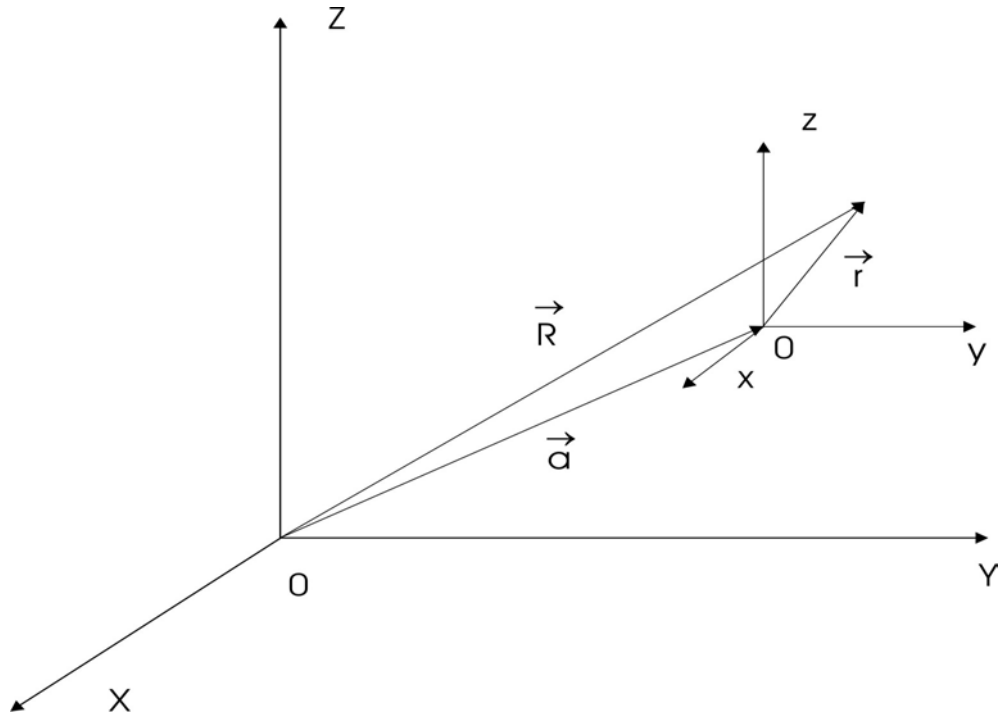


Figura 9-14

Da figura 9-14, vemos que

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{a} \quad (9.257)$$

Em termos de suas componentes, teremos

$$X_i = x_i + a_i \quad (9.258)$$

Substituindo (9.258) em (9.256)

$$J_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_k (x_{\alpha k} + a_k)^2 - (x_{\alpha i} + a_i)(x_{\alpha j} + a_j) \right] \quad (9.259)$$

$$J_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha k}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right] + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ij} \sum_k (2x_{\alpha k} a_k + a_k^2) - x_{\alpha i} a_j - x_{\alpha j} a_i - a_i a_j \right] \quad (9.260)$$

Observando o primeiro termo da equação anterior, vemos que este é exatamente o tensor de inércia tomado em relação ao centro de massa, I_{ij}

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha k}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right) \quad (9.261)$$

Substituindo (9.261) em (9.260) e rearranjando os outros termos teremos

$$J_{ij} = I_{ij} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\delta_{ij} \sum_k a_k^2 - a_i a_j \right) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[2\delta_{ij} \sum_k x_{\alpha k} a_k - x_{\alpha j} a_i - x_{\alpha i} a_j \right] \quad (9.262)$$

Em todos os termos do último somatório da equação anterior aparece a expressão

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha k} \quad (9.263)$$

que é zero, conforme equação (2.73), pois o referencial *oxyz* está localizado no centro de massa do sistema. Fazendo agora

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} = M \quad (9.264)$$

$$\sum_k a_k^2 = a^2 \quad (9.265)$$

a equação (9.262) poderá ser escrita da forma

$$J_{ij} = I_{ij} + M (a^2 \delta_{ij} - a_i a_j) \quad (9.266)$$

O segundo termo dessa equação é exatamente o tensor de inércia em relação ao centro de massa. O resultado expresso pela equação (9.266) é conhecido como teorema dos eixos paralelos ou teorema de Steiner, que nos diz que o tensor de inércia de um ponto qualquer é a soma do tensor de inércia do centro de massa com o tensor de inércia em relação ao centro de massa.

Um outro aspecto relevante consiste em solucionar o problema do corpo rígido quando este gira em torno de um eixo arbitrário que não seja nenhum dos eixos principais, conforme mostra a figura 9-15

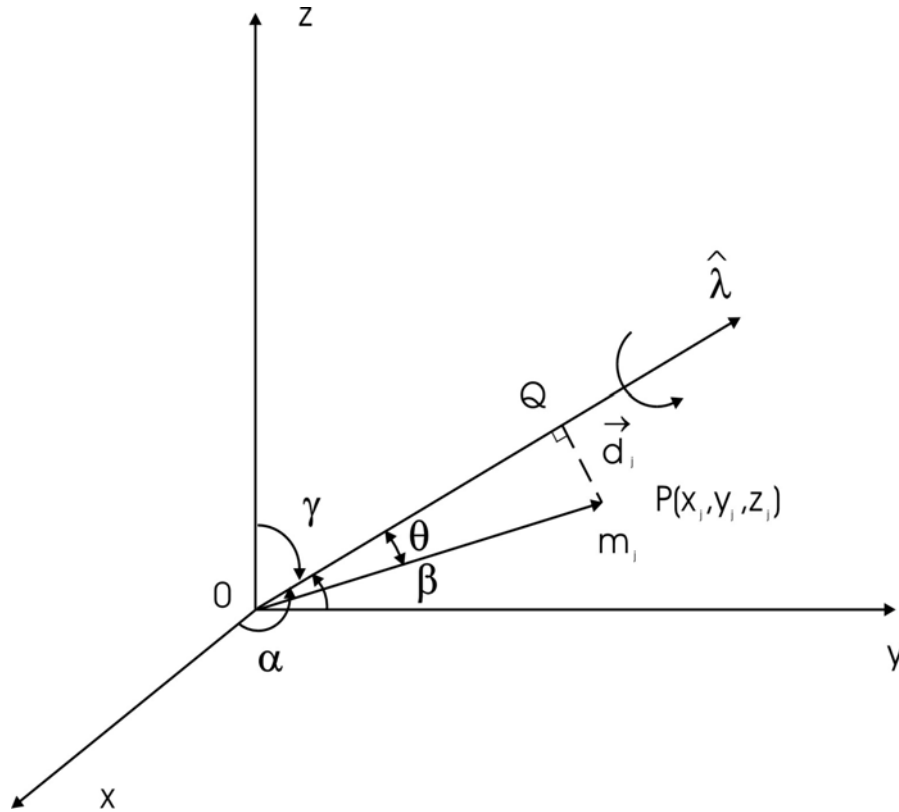


Figura 9-15

Nesse caso, a equação (9.93) não seria mais aplicável para o cálculo de I_{ij} . Apesar disso, o problema pode ser tratado de forma relativamente simples.

Sejam α , β e γ os ângulos que o eixo de rotação faz com os eixos fixos x , y e z , respectivamente. O vetor unitário na direção do eixo de rotação ($\hat{\lambda}$) será

$$\hat{\lambda} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k} \quad (9.267)$$

O momento de inércia da partícula j será

$$I_{j\lambda} = m_j d_j^2 \quad (9.268)$$

onde d_j é a distância do ponto P ao ponto Q (veja a figura 9-15), cujo módulo é dado por

$$d_j = |\vec{r}_j \times \hat{\lambda}| \quad (9.269)$$

$$\vec{d}_j = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_j & y_j & z_j \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \end{vmatrix} \quad (9.270)$$

$$\vec{d}_j = (y_j \cos \gamma - z_j \cos \beta) \vec{i} + (z_j \cos \alpha - x_j \cos \gamma) \vec{j} + (x_j \cos \beta - y_j \cos \alpha) \vec{k} \quad (9.271)$$

Assim,

$$d_j^2 = (y_j \cos \gamma - z_j \cos \beta)^2 + (z_j \cos \alpha - x_j \cos \gamma)^2 + (x_j \cos \beta - y_j \cos \alpha)^2 \quad (9.272)$$

$$\begin{aligned} d_j^2 = & y_j^2 (\cos \gamma)^2 + z_j^2 (\cos \beta)^2 - 2y_j z_j \cos \beta \cos \gamma + \\ & + z_j^2 (\cos \alpha)^2 + x_j^2 (\cos \gamma)^2 - 2x_j z_j \cos \alpha \cos \gamma + \\ & + x_j^2 (\cos \beta)^2 + y_j^2 (\cos \alpha)^2 - 2x_j y_j \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (9.273)$$

$$\begin{aligned} d_j^2 = & (\cos \alpha)^2 (y_j^2 + z_j^2) + (\cos \beta)^2 (x_j^2 + z_j^2) + (\cos \gamma)^2 (y_j^2 + x_j^2) \\ & - 2y_j z_j \cos \beta \cos \gamma - 2x_j z_j \cos \alpha \cos \gamma - 2x_j y_j \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (9.274)$$

Substituindo a equação anterior em (9.268) e somando sobre todas as partículas

$$\begin{aligned} I_\lambda = & \sum_j m_j (\cos \alpha)^2 (y_j^2 + z_j^2) + \sum_j m_j (\cos \beta)^2 (x_j^2 + z_j^2) + \\ & + \sum_j m_j (\cos \gamma)^2 (y_j^2 + x_j^2) - 2 \sum_j m_j y_j z_j \cos \beta \cos \gamma + \\ & - 2 \sum_j m_j x_j z_j \cos \alpha \cos \gamma - 2 \sum_j m_j x_j y_j \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (9.275)$$

que de acordo com as equações de (9.109) a (9.117), pode ser reescrita da forma

$$\begin{aligned} I_\lambda = & I_{xx} (\cos \alpha)^2 + I_{yy} (\cos \beta)^2 + I_{zz} (\cos \gamma)^2 \\ & + 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma + 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \quad (9.276)$$

Essa equação nos diz que conhecido o tensor de inércia I_{ij} , I_λ pode ser obtido a partir deste. Sua interpretação é facilitada se observarmos que os cossenos diretores são dados por

$$\cos \alpha = \frac{x_j}{r_j}, \quad \cos \beta = \frac{y_j}{r_j} \quad \text{e} \quad \cos \gamma = \frac{z_j}{r_j} \quad (9.277)$$

e podem variar no tempo. Substituindo (9.277) em (9.276), teremos

$$I_{xx} \frac{x_j^2}{r_j^2} + I_{yy} \frac{y_j^2}{r_j^2} + I_{zz} \frac{z_j^2}{r_j^2} + 2I_{yz} \frac{y_j z_j}{r_j^2} + 2I_{xz} \frac{x_j z_j}{r_j^2} + 2I_{xy} \frac{x_j y_j}{r_j^2} = I_\lambda \quad (9.278)$$

$$I_{xx} x_j^2 + I_{yy} y_j^2 + I_{zz} z_j^2 + 2I_{yz} y_j z_j + 2I_{xz} x_j z_j + 2I_{xy} x_j y_j = I_\lambda r_j^2 \quad (9.279)$$

Se escolhermos

$$I_\lambda r_j^2 = 1 \quad (9.280)$$

a equação (9.279) ficará

$$I_{xx} x_j^2 + I_{yy} y_j^2 + I_{zz} z_j^2 + 2I_{xy} x_j y_j + 2I_{xz} x_j z_j + 2I_{yz} y_j z_j = 1 \quad (9.281)$$

que representa uma superfície quadrática com centro na origem, cuja distância deste ponto à superfície será

$$r_j = \frac{1}{\sqrt{I_\lambda}} \quad (9.282)$$

Como I_λ é sempre diferente de zero, r_j é sempre finito, de modo que a superfície é um elipsóide, conhecido como elipsóide de inércia de Poinot.

Quando os eixos coordenados são os eixos principais, a equação (9.279) se reduz a

$$I_{xx}x_j^2 + I_{yy}y_j^2 + I_{zz}z_j^2 = 1 \quad (9.283)$$

Mostramos nas figuras 9-16 e 9-17 os gráficos das equações (9.281) e (9.283), respectivamente. É usual representarmos o momento de inércia em relação a um eixo como o produto de sua massa pelo quadrado de uma grandeza que tem dimensão de comprimento

$$I_\lambda = MK_\lambda^2 \quad (9.284)$$

Essa grandeza, K_λ , é denominada de raio de giração em relação ao eixo λ , e tem a seguinte interpretação física: caso a massa do corpo rígido fosse concentrada em um único ponto, a uma distância K_λ de seu eixo de rotação ($\hat{\lambda}$), a equação (9.284) daria o valor do momento de inércia em relação ao referido eixo.

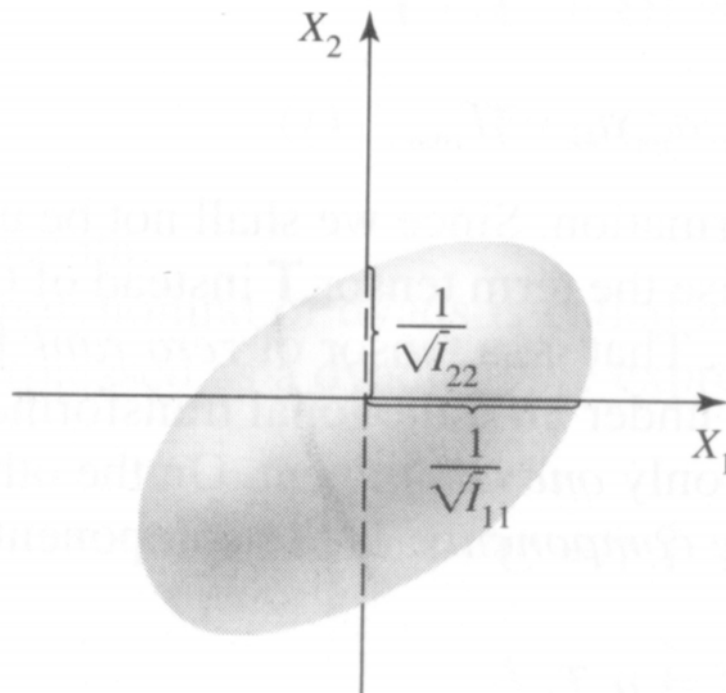


Figura 9-16

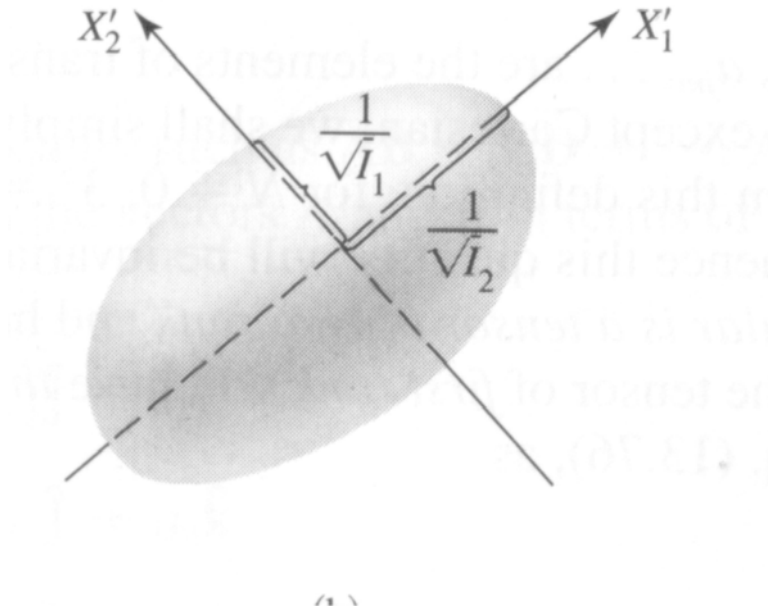


Figura 9-17

9-7 MÉTODOS DE ANÁLISE DO MOVIMENTO DE CORPOS RÍGIDOS NO ESPAÇO

Nas seções precedentes vimos que a descrição do movimento de um corpo rígido no espaço seria determinada pelas equações:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext} \quad (9.285)$$

onde

$$\vec{P} = M\vec{V} \quad (9.286)$$

e

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{ext} \quad (9.287)$$

onde

$$\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega} \quad (9.288)$$

Comparando as equações (9.285) e (9.286) com (9.287) e (9.288), vemos que estas são formalmente idênticas. Entretanto, essa analogia é tautológica, pois se fosse real, todos os

métodos utilizados na análise do movimento de translação seriam aplicados igualmente ao movimento de rotação. Observando com mais cuidado, vemos que:

- 1 - A massa M da equação (9.286) é uma grandeza escalar (tensor de ordem zero) enquanto $\vec{I}$, da equação (9.288) é um tensor de ordem dois;
- 2 - Não existe um conjunto simétrico de coordenadas, análogas a que descreve a localização de um ponto no espaço, que possa descrever a orientação do corpo no espaço.

Essas considerações mostram que:

- 1 – Apesar de $\vec{P}$ ter a mesma direção de $\vec{V}$, o mesmo não é verdade quando se relaciona $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$.
- 2 – A massa M é constante no tempo, enquanto, o tensor de inércia, não se mantém constante, em relação a um sistema de coordenadas fixo no espaço.

Na verdade, a solução para o movimento de um corpo rígido que gira livremente pode ser obtida por dois métodos gerais: O método geométrico de Poinsot e o método analítico de Euler, que serão abordados a seguir. Antes de efetivamente trabalharmos esses métodos, vale relembrar algumas restrições e/ou observações que devem ser seguidas:

- 1 – Se um ponto do corpo permanece fixo, esse ponto deve ser tomado como origem e os momentos de inércia e os torques tomados em relação a esse ponto.
- 2 – Se o corpo não sofre restrição quanto a seu movimento, o centro de massa deve ser tomado como origem do sistema de coordenadas do corpo rígido.
- 3 – Como os eixos principais são fixos no referencial do corpo rígido, qualquer força deve ser considerada ao longo desses eixos, na direção que o corpo se move.

9-7-1 O MÉTODO DE POINSOT

Consideremos um corpo rígido fixo em um ponto e sobre o qual não atuam forças. Seus eixos principais são tomados como sistema de referência, com origem em 0, cuja velocidade angular $\vec{\omega}$ e momento angular $\vec{L}$ sejam dados por:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j} + \omega_3 \vec{k} \quad (9.289)$$

$$\vec{L} = I_1 \omega_1 \vec{i} + I_2 \omega_2 \vec{j} + I_3 \omega_3 \vec{k} \quad (9.290)$$

Quando o torque em relação à origem 0 é nulo, temos conservação de momento angular e de energia cinética de rotação.

Pela conservação de momento angular, seu módulo é constante e tem direção fixa no espaço, isto é:

$$\vec{L} \cdot \vec{L} = I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 \quad (9.291)$$

$$= \vec{L}^2 = \text{constante} \quad (9.292)$$

Pela conservação de energia cinética de rotação, da equação (9.140), temos que

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^t \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^t \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} \quad (9.293)$$

assim,

$$I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 = 2T_{rot} \quad (9.294)$$

$$= \text{constante} \quad (9.295)$$

Como o momento angular tem direção fixa, traçaremos uma reta $\overline{OP}$, denominada de reta invariável, que suporta o momento angular $\vec{L}$. Observando a equação (9.293), vemos que a projeção de $\vec{\omega}$ na reta invariável é constante

$$\vec{\omega} \cdot \vec{L} = 2T_{rot} \quad (9.296)$$

de modo que a figura 9-18 representa a situação descrita nesse parágrafo. Nessa figura $\overline{OQ}$ representa a velocidade angular $\vec{\omega}$ em qualquer instante de tempo e $\overline{NQ}$ é uma reta perpendicular a $\overline{OP}$ que repousa sobre o plano.

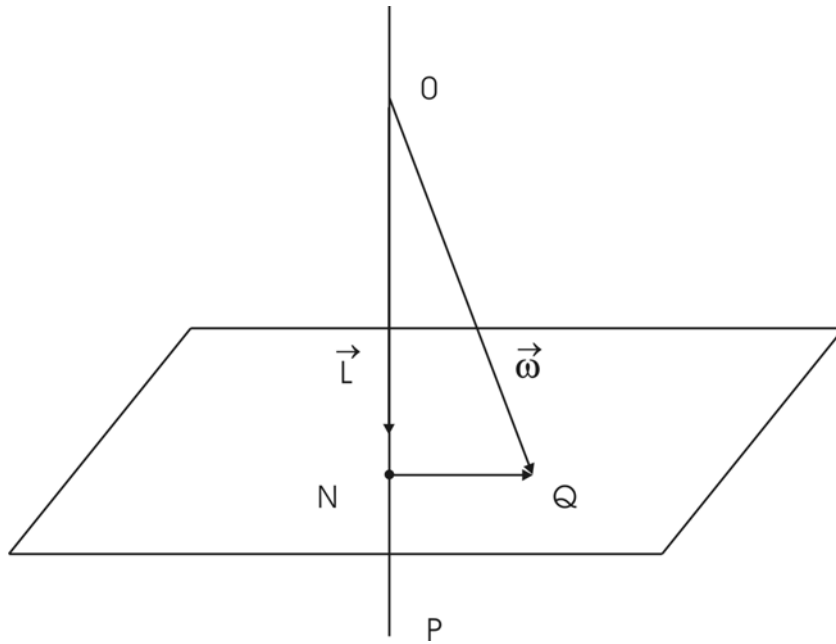


Figura 9-18

Observe que a distância $\overline{ON}$ é dada por

$$\overline{ON} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{L}}{L} \quad (9.297)$$

substituindo (9.296) na equação anterior

$$\overline{ON} = \frac{2T}{L} \quad (9.298)$$

$$= \text{constante} \quad (9.299)$$

Isto é, N é um ponto fixo durante todo o movimento, fazendo com que o plano que passa por N , que tem a reta invariável como normal, seja fixo, daí o seu nome de plano invariável. Como o corpo rígido gira, um observador no sistema de coordenadas do corpo veria uma rotação ou precessão de $\vec{\omega}$ em torno de $\vec{L}$, de modo que a extremidade de $\vec{\omega}$ descreveria uma curva no plano invariante.

Uma vez que as componentes de $\vec{\omega}$ devam satisfazer simultaneamente as duas equações, (9.291) e (9.294), fazendo os gráficos das referidas equações, podemos determinar os valores que $\vec{\omega}$ pode assumir, conforme mostra a figura 9-19

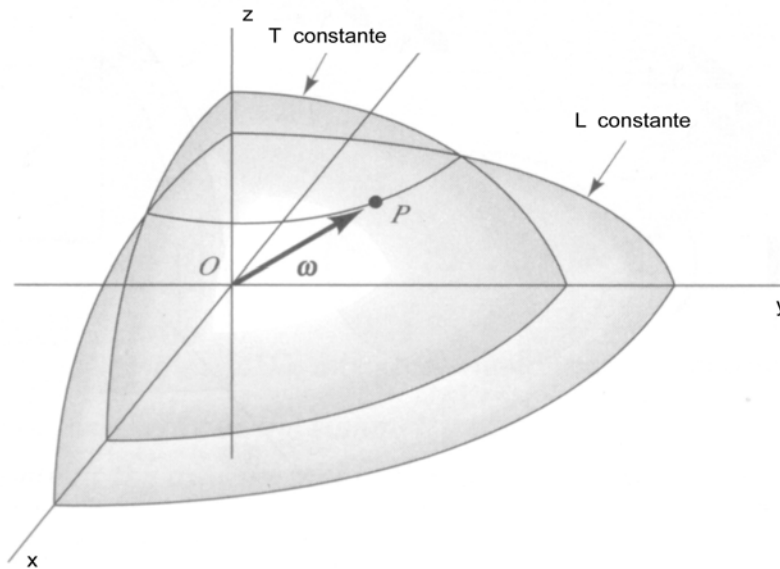


Figura 9-19

Quando o eixo inicial de rotação coincide com um dos eixos principais do corpo, a interseção se reduz a um ponto, desde que a rotação seja em torno do eixo com maior ou menor momento de inércia, conforme mostra as figuras 9-20 e 9-21, onde $I_3 > I_2 > I_1$. Observe que os movimentos serão estáveis em ambos os casos

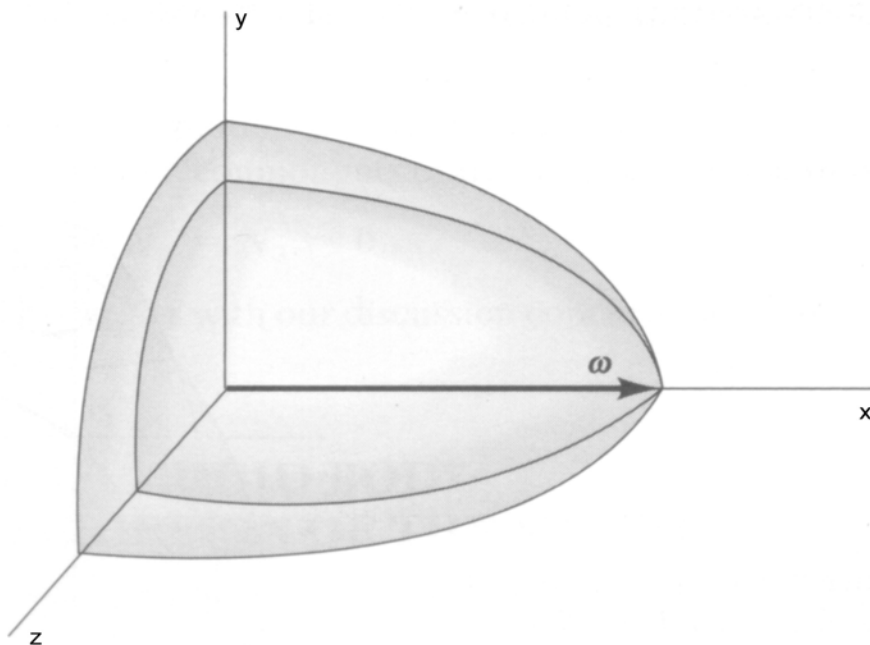


Figura 9-20

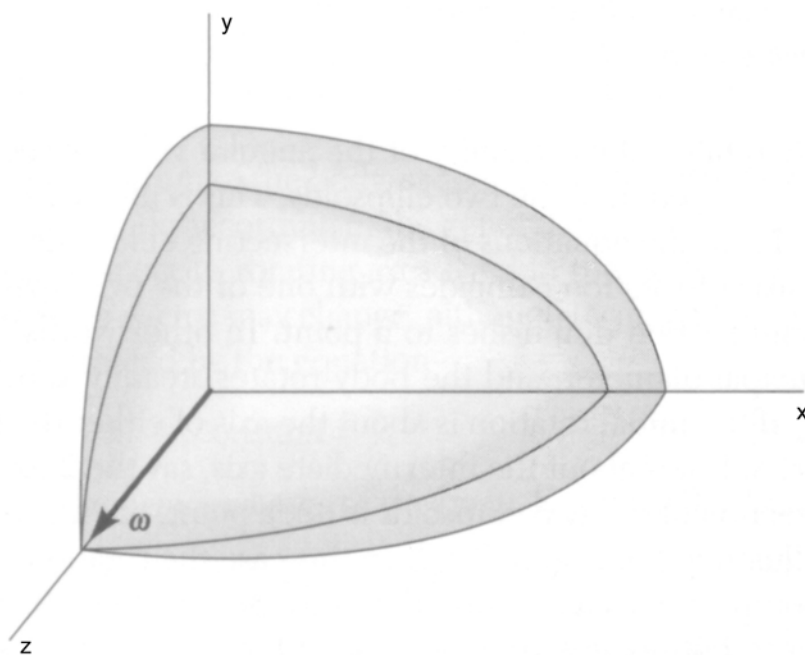


Figura 9-21

Quando o eixo de rotação é o que tem o valor do momento de inércia intermediário, a interseção será uma curva, conforme mostra a figura 9-22

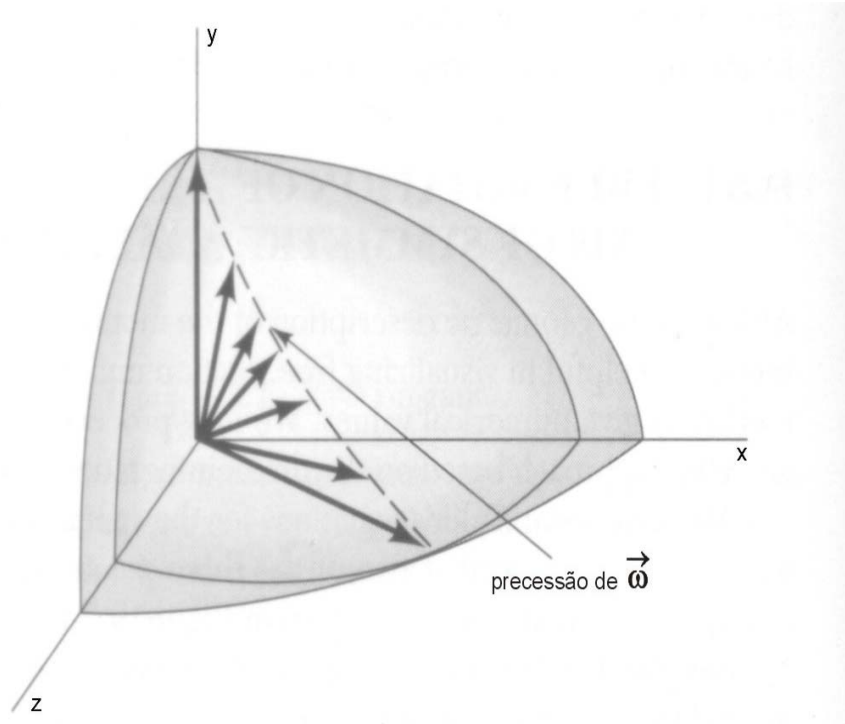


Figura 9-22

fazendo com que o movimento seja instável.

Poinsot interpretou essas propriedades da seguinte forma: o plano invariável é fixo no espaço, entretanto para um observador que se move com o corpo, este plano é móvel, e toca uma esfera, cujo raio é a distância $\overline{ON}$, de modo que o plano invariante toca o elipsóide de Poincaré exatamente na extremidade de $\vec{\omega}$. Isso é visto claramente, se observarmos que a equação do plano tangente ao elipsóide de Poincaré no ponto $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ é dada por

$$I_1\omega_1x + I_2\omega_2y + I_3\omega_3z = 2T \quad (9.300)$$

A normal ao elipsóide nesse ponto será

$$\hat{n} \propto I_1\omega_1\vec{i} + I_2\omega_2\vec{j} + I_3\omega_3\vec{k} \quad (9.301)$$

cuja direção é a mesma de $\vec{L}$, conforme mostra a equação (9.290). Isso nos diz que o vetor $\vec{\omega}$ será tal que a correspondente normal ao elipsóide de inércia terá sempre a direção de $\vec{L}$.

A curva fechada descrita pelo ponto de contato do elipsóide é denominada de polodia. A curva traçada pelo ponto de contato do elipsóide com o plano invariante é denominada de herpolodia. A figura 9-23 mostra esses elementos.

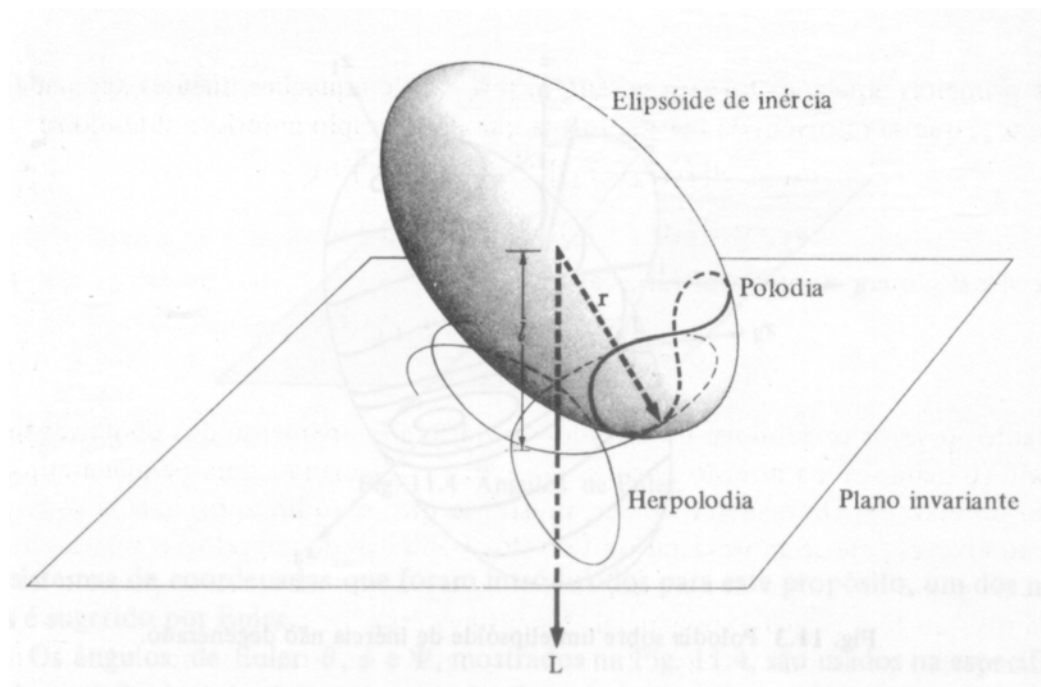


Figura 9-23

Para um observador inercial, sua atenção é voltada para o plano invariante e ao movimento do elipsóide sobre o plano. Em geral, esse movimento é extremamente complicado. Entretanto, para sólidos simétricos, o elipsóide de inércia se reduz a um elipsóide de revolução, de modo que a herpolodia será um círculo sobre o plano invariante, fazendo com que $\vec{\omega}$ descreva um cone, denominado de cone do espaço.

Para um observador no referencial do corpo rígido, sua atenção é voltada para a interseção dos elipsóides, isto é, para os valores que $\vec{\omega}$ pode assumir. Nesse caso, $\vec{\omega}$ descreverá um cone, o cone do corpo, cuja polodia será um círculo em torno do eixo de simetria (eixo de rotação).

Apesar dessas diferentes visões, ambos concordam que um cone rola sobre o outro. Para o observador inercial, o cone espacial está fixo, enquanto para o observador no corpo rígido quem está fixo é cone do corpo.

9-7-2 O MÉTODO DE EULER

Para solucionarmos o problema de rotação de um corpo rígido, devemos resolver a equação

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (9.302)$$

em que

$$\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega} \quad (9.303)$$

Na equação (9.302), a derivada temporal é tomada em relação a um referencial inercial. Nesse referencial o tensor de inércia varia. Entretanto, se escolhermos os eixos principais como o sistema de referência a ser adotado, isso não mais acontece. A mudança do referencial inercial para o referencial do corpo se faz através do operador (4.22). Assim, para o momento angular, teremos,

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{0'} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (9.304)$$

igualando as equações (9.302) e (9.304),

$$\vec{\tau} = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{0'} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (9.305)$$

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{0'} = \vec{\tau} - \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (9.306)$$

O último membro da equação anterior pode ser interpretado como um torque fictício, devido à natureza não inercial do referencial do corpo. Substituindo (9.303) em (9.306),

$$\frac{d(\vec{I} \cdot \vec{\omega})}{dt} = \vec{\tau} - \vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) \quad (9.307)$$

Da equação 4.30, vimos que,

$$\left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{0'} \quad (9.308)$$

de modo que (9.307) ficará:

$$\vec{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau} - \vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) \quad (9.309)$$

A partir dessa equação podemos definir o princípio de conservação de energia. Para isso tomemos o produto escalar de $\vec{\omega}$, na equação (9.309),

$$\vec{\omega} \cdot \left(\vec{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau} - \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) \quad (9.310)$$

Como

$$\vec{\omega} \cdot (\vec{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} \quad (9.311)$$

das equações (9.288) e (9.296) vemos que

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \cdot (\vec{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}) &= \frac{1}{2} \frac{d(\vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega})}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} \right) \\ \vec{\omega} \cdot (\vec{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}) &= \frac{d(T_{rot})}{dt} \end{aligned} \quad (9.312)$$

então

$$\frac{d(T_{rot})}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau} \quad (9.313)$$

A equação (9.309) também nos mostra que um corpo não pode girar com velocidade angular constante se o torque externo é nulo, exceto quando gira em torno de um eixo principal. Veremos como demonstrar essa afirmação. Quando

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \quad (9.314)$$

teremos que, para a equação (9.309)

$$\vec{\tau} = \vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) \quad (9.315)$$

Essa equação só é nula quando o termo

$$\vec{I} \cdot \vec{\omega} \quad (9.316)$$

é nulo, isto é, quando $\vec{\omega}$ tem a mesma direção do eixo principal.

Vejam agora como fica a equação (9.309), em termos de suas componentes, tendo como sistema de referência seus eixos principais:

$$\vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ I_1\omega_1 & I_2\omega_2 & I_3\omega_3 \end{vmatrix} \quad (9.317)$$

$$= (\omega_2 I_3 \omega_3 - \omega_3 I_2 \omega_2) \vec{i} - (\omega_1 I_3 \omega_3 - \omega_3 I_1 \omega_1) \vec{j} + (\omega_1 I_2 \omega_2 - \omega_2 I_1 \omega_1) \vec{k}$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{I} \cdot \vec{\omega}) = \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2) \vec{i} + \omega_1 \omega_3 (I_1 - I_3) \vec{j} + \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1) \vec{k} \quad (9.318)$$

Substituindo este resultado em (9.309), teremos

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = \tau_1 + \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \quad (9.319)$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = \tau_2 + \omega_1 \omega_3 (I_3 - I_1) \quad (9.320)$$

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = \tau_3 + \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) \quad (9.321)$$

Essas equações são conhecidas como equações de Euler para o movimento de um corpo rígido fixo em um ponto em um campo de forças. Observe que estas podem ser escritas em termo de suas componentes em uma única equação

$$(I_i - I_j) \omega_i \omega_j = \sum_k \left(I_k \frac{d\omega_k}{dt} - \tau_k \right) \epsilon_{ijk} \quad (9.322)$$

Vale lembrar que ω_1 , ω_2 e ω_3 não são as componentes da velocidade angular usual e sim derivadas temporais de coordenadas espaciais, conforme definição dada na seção 3.

Quando o torque externo é nulo, as equações de Euler se reduzem a

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \quad (9.323)$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = \omega_1 \omega_3 (I_3 - I_1) \quad (9.324)$$

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) \quad (9.325)$$

cujas soluções são obtidas através de integrais elípticas, tarefa um tanto quanto trabalhosa. Entretanto, para corpos rígidos simétricos, essas equações se tornam mais simples. Na próxima seção resolveremos essas equações para o caso do pião simétrico.

9-8 O MOVIMENTO DE UM PIÃO SIMÉTRICO COM TORQUE NULO

Vimos na seção 6 que o pião simétrico é um corpo rígido que possui um eixo de simetria e dois de seus momentos principais de inércia iguais. Usualmente, convencionase que o eixo de simetria tem a direção do eixo z , cujo momento principal de inércia ao longo desse eixo é I_3 . Os outros momentos principais de inércia ao longo dos eixos x e y são iguais a I_1 e I_2 , respectivamente,

$$I_1 = I_2 = I \quad (9.326)$$

Assim, as equações de Euler [equações (9.323), (9.324) e (9.325)] se reduzem a

$$I \dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 (I - I_3) \quad (9.327)$$

$$I \dot{\omega}_2 = \omega_3 \omega_1 (I_3 - I) \quad (9.328)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad (9.329)$$

Da última equação,

$$\frac{d\omega_3(t)}{dt} = 0 \quad (9.330)$$

logo,

$$\omega_3(t) = \text{constante} \quad (9.331)$$

Das outras duas equações, equações (9.327) e (9.328), teremos que

$$\dot{\omega}_1 = \frac{(I - I_3)}{I} \omega_2 \omega_3 \quad (9.332)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{(I_3 - I)}{I} \omega_1 \omega_3 \quad (9.333)$$

Definindo uma nova grandeza Ω

$$\Omega = \frac{(I_3 - I)}{I} \omega_3 \quad (9.334)$$

teremos que

$$\dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2 \quad (9.335)$$

$$\dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1 \quad (9.336)$$

Derivando a equação (9.335)

$$\ddot{\omega}_1 = -\Omega \dot{\omega}_2 \quad (9.337)$$

e substituindo (9.336) em (9.337)

$$\ddot{\omega}_1 = -\Omega \Omega \omega_1 \quad (9.338)$$

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0 \quad (9.339)$$

que é formalmente igual à equação do oscilador harmônico simples, cuja solução será

$$\omega_1(t) = A \cos(\Omega t + \varphi_0) \quad (9.340)$$

Derivando (9.340) e substituindo em (9.335), teremos a solução para $\omega_2(t)$

$$\omega_2(t) = \frac{-\dot{\omega}_1}{\Omega} \quad (9.341)$$

$$\omega_2(t) = -\frac{1}{\Omega} [-A \sin(\Omega t + \varphi_0)] \Omega \quad (9.342)$$

$$\omega_2(t) = A \sin(\Omega t + \varphi_0) \quad (9.343)$$

Observe que as equações (9.340) e (9.343) são as equações paramétricas de um círculo de raio A no plano xy . Como

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = A^2 \quad (9.344)$$

e

$$\omega_3 = \text{constante} \quad (9.345)$$

e tem a direção do eixo z , podemos construir o modelo geométrico para a velocidade angular, conforme mostra a figura 9-24

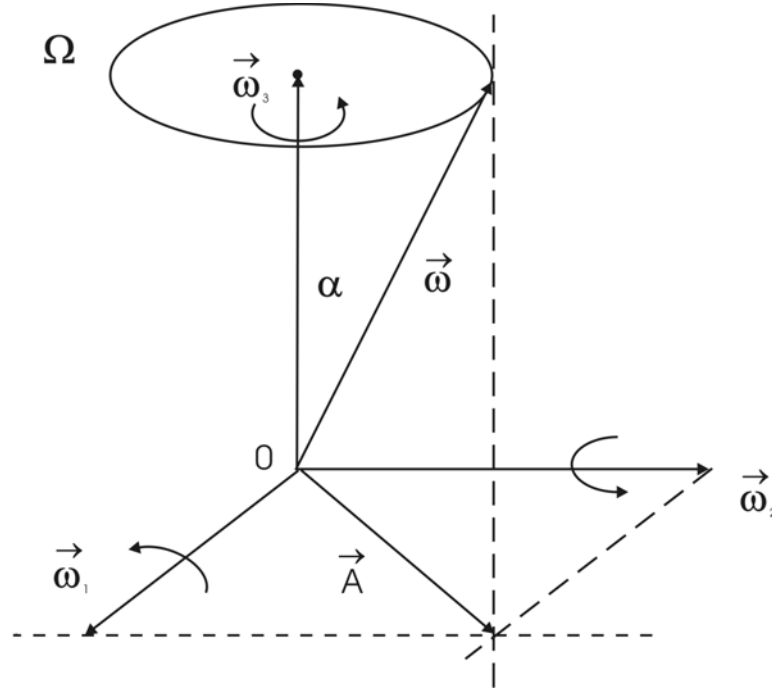


Figura 9-24

Vemos que

$$\omega = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} \quad (9.346)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} \quad (9.347)$$

isto é, $\vec{\omega}$ precessiona em torno do eixo z com frequência angular Ω e sua projeção no plano xy é A . Para um observador no sistema de coordenadas do corpo, $\vec{\omega}$ traça um cone em torno do eixo de simetria (eixo z) – o cone do corpo – como já foi discutido anteriormente.

Em nosso problema, o momento angular $\vec{L}$ é dado por

$$\vec{L} = I_1\omega_1\vec{i} + I_2\omega_2\vec{j} + I_3\omega_3\vec{k} \quad (9.348)$$

$$\vec{L} = I(\omega_1\vec{i} + \omega_2\vec{j}) + I_3\omega_3\vec{k} \quad (9.349)$$

e está no mesmo plano de $\vec{\omega}$ e ω_3 . Isso pode ser verificado se calcularmos

$$\vec{L} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\omega}_3) \quad (9.350)$$

Temos que

$$\vec{\omega} \times \vec{\omega}_3 = \vec{\omega} \times \omega_3 \vec{k} \quad (9.351)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{\omega}_3 = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{pmatrix} \quad (9.352)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{\omega}_3 = (\omega_2 \omega_3 \vec{i} - \omega_1 \omega_3 \vec{j}) \quad (9.353)$$

Substituindo a equação anterior em (9.350)

$$\vec{L} \cdot (\vec{\omega} \times \omega_3 \vec{k}) = [I(\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j}) + I_3 \omega_3 \vec{k}] \cdot (\omega_2 \omega_3 \vec{i} - \omega_1 \omega_3 \vec{j}) \quad (9.354)$$

$$\vec{L} \cdot (\vec{\omega} \times \omega_3 \vec{k}) = I\omega_1\omega_2\omega_3 - I\omega_1\omega_2\omega_3 = 0 \quad (9.355)$$

Seja α o ângulo entre ω_3 e $\vec{\omega}$ e θ o ângulo entre $\vec{\omega}_3$ e $\vec{L}$. Lembrando que $\vec{A}$ é a projeção de $\vec{\omega}$ no plano xy , podemos traçar esses vetores conforme a figura 9-25. Dessa figura vemos que

$$\text{tg } \theta = \frac{IA}{I_3 \omega_3} \quad (9.356)$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{A}{\omega_3} \quad (9.357)$$

Assim, de (9.356) e (9.357), teremos

$$\text{tg } \theta = \frac{I}{I_3} \text{tg } \alpha \quad (9.258)$$

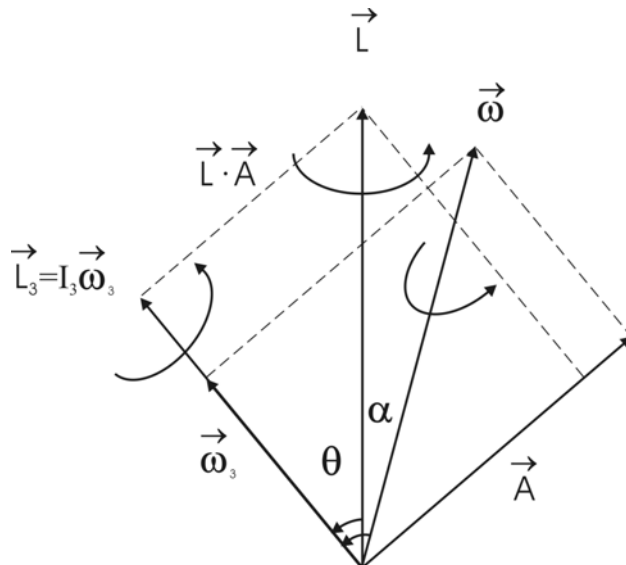


Figura 9-25

Se $I < I_3$, $\theta < \alpha$, de modo que $\vec{L}$ fica entre $\vec{\omega}_3$ e $\vec{\omega}$, conforme mostra a figura 9-25. Se $I > I_3$, $\theta > \alpha$, de modo que $\vec{L}$ fica entre $\vec{\omega}$ e $\vec{A}$, conforme a figura 9-26

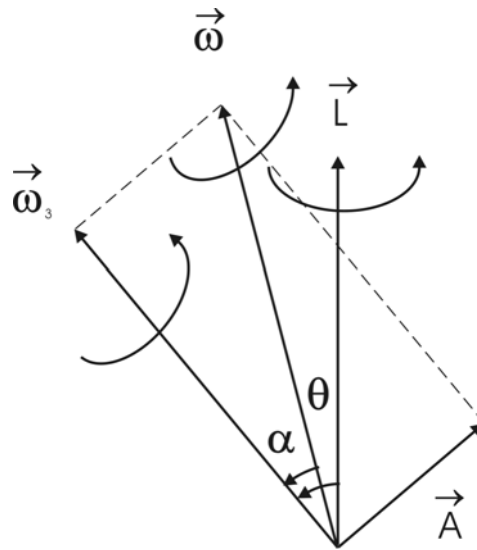


Figura 9-26

Resumindo, quando o torque é nulo, o módulo do momento angular é constante, e a projeção de $\vec{\omega}$ na sua direção é constante, de modo que $\vec{\omega}$ precessiona em torno de $\vec{L}$ com ângulo fixo. Assim, os movimentos seriam como mostram as figuras 9-27 e 9-28, para $I < I_3$ e para $I > I_3$, respectivamente.

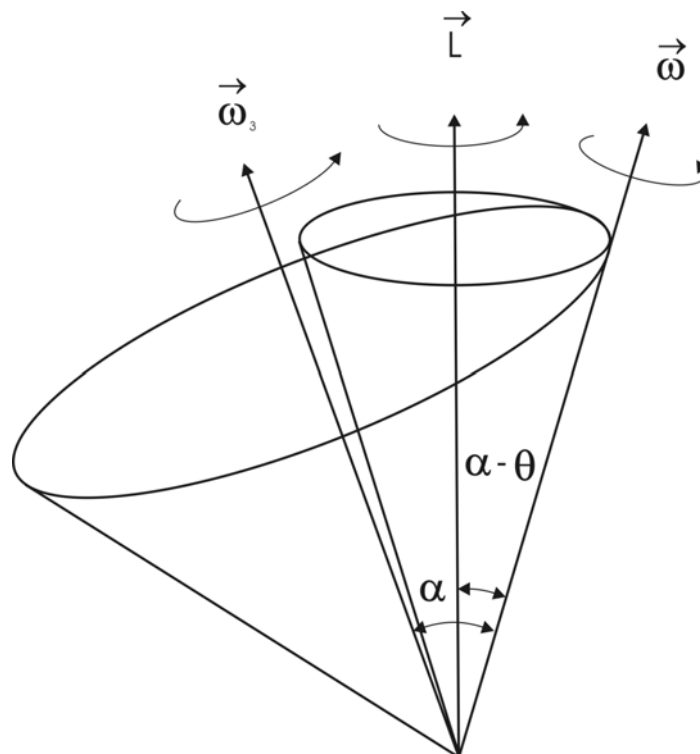


Figura 9-27

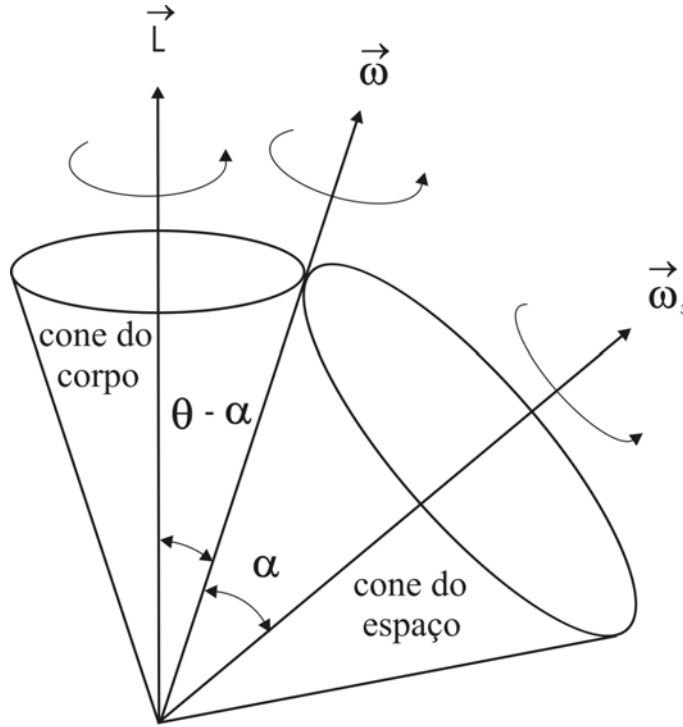


Figura 9-28

Vejamos agora com que velocidade o eixo de simetria e $\vec{\omega}$ rotacionam em torno de $\vec{L}$. Como $\vec{\omega}_3$, $\vec{\omega}$ e $\vec{L}$ são coplanares, $\vec{\omega}_3$ e $\vec{\omega}$ precessionam em torno de $\vec{L}$ com a mesma velocidade angular. Tomando um instante de tempo em que y está no plano de z , $\vec{\omega}$ e $\vec{L}$; o ângulo de Euler $\psi = 0$, a equação (9.69) nos diz que

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \quad (9.359)$$

Resolvendo para $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_2}{\sin \theta} \quad (9.360)$$

Como

$$\omega_2 = \omega \sin \alpha \quad (9.361)$$

$$\dot{\varphi} = \omega \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \quad (9.362)$$

Da equação (9.358) temos que

$$\tan \theta = \frac{I}{I_3} \tan \alpha \quad (9.358)$$

Usando a identidade trigonométrica

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}} \quad (9.363)$$

na equação (9.358), teremos

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}} = \frac{I}{I_3} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

Tomando o quadrado da equação anterior,

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} = \left(\frac{I}{I_3} \right)^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \left(\frac{I}{I_3} \right)^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)$$

e dividindo agora ambos os lados por $\operatorname{sen}^2 \theta$, e sabendo que $\cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \theta (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \left(\frac{I_3}{I} \right)^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)}{\operatorname{sen}^2 \theta}$$

$$\left(\frac{I_3}{I} \right)^2 \cos^2 \alpha = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \theta} - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

Resolvendo agora para $\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \theta}$ e sabendo que $\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \theta} = \left(\frac{I_3}{I} \right)^2 \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \theta} = \left(\frac{I_3}{I} \right)^2 \cos^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \theta} = \left[\left(\frac{I_3}{I} \right)^2 - 1 \right] \cos^2 \alpha + 1 \quad (9.364)$$

Assim, extraindo a raiz de ambos os lados,

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \theta} = \left\{ 1 + \left[\left(\frac{I_3}{I} \right)^2 - 1 \right] \cos^2 \alpha \right\}^{1/2} \quad (9.365)$$

Substituindo (9.365) em (9.362), teremos

$$\dot{\varphi} = \omega \left\{ 1 + \left[\left(\frac{I_3}{I} \right)^2 - 1 \right] \cos^2 \alpha \right\}^{1/2} \quad (9.366)$$

onde ω é a velocidade angular do corpo em torno do seu eixo de rotação e α é o ângulo que o eixo de rotação faz com o eixo de simetria do corpo.

9-9 MOVIMENTO DE UM PIÃO SIMÉTRICO NO CAMPO GRAVITACIONAL DA TERRA

Na seção anterior estudamos o movimento de um pião simétrico livre de torques. Agora, trabalharemos seu movimento quando sofre a ação do torque produzido por seu próprio peso. Para isso, devemos escrever as equações de Euler, equações (9.319), (9.320) e (9.321), para o problema

$$I \frac{d\omega_1}{dt} = \tau_1 + \omega_2 \omega_3 (I - I_3) \quad (9.367)$$

$$I \frac{d\omega_2}{dt} = \tau_2 + \omega_1 \omega_3 (I_3 - I) \quad (9.368)$$

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = \tau_3 \quad (9.369)$$

Mostramos na figura 9-29 os parâmetros geométricos do sistema.

O torque será dado por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (9.370)$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g} \quad (9.371)$$

$$\tau = mgl \sin \theta \quad (9.372)$$

e sua direção será ao longo da linha do nodo. Assim, as componentes do torque tomadas em relação ao sistema de referência do corpo ($0x_3y_3z_3$) serão dadas por

$$\tau_1 = mgl \sin \theta \cos \psi \quad (9.373)$$

$$\tau_2 = -mgl \sin \theta \sin \psi \quad (9.374)$$

$$\tau_3 = 0 \quad (9.375)$$

Substituindo os valores de ω_1 , ω_2 e ω_3 , dados pelas equações (9.68), (9.69) e (9.70), e as componentes do torque, equações (9.373), (9.374) e (9.375), nas equações (9.367), (9.368) e (9.369), teremos

$$I \frac{d}{dt} \left(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \right) + (I_3 - I) \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right) \left(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \right) = mgl \sin \theta \cos \psi \quad (9.376)$$

$$I \frac{d}{dt} \left(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \right) - (I_3 - I) \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right) \left(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \right) = -mgl \sin \theta \sin \psi \quad (9.377)$$

$$I_3 \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = 0 \quad (9.378)$$

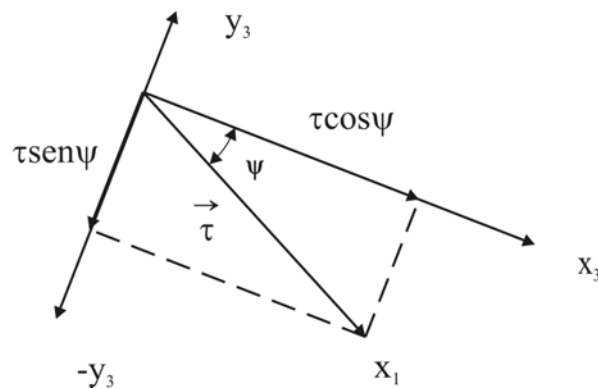
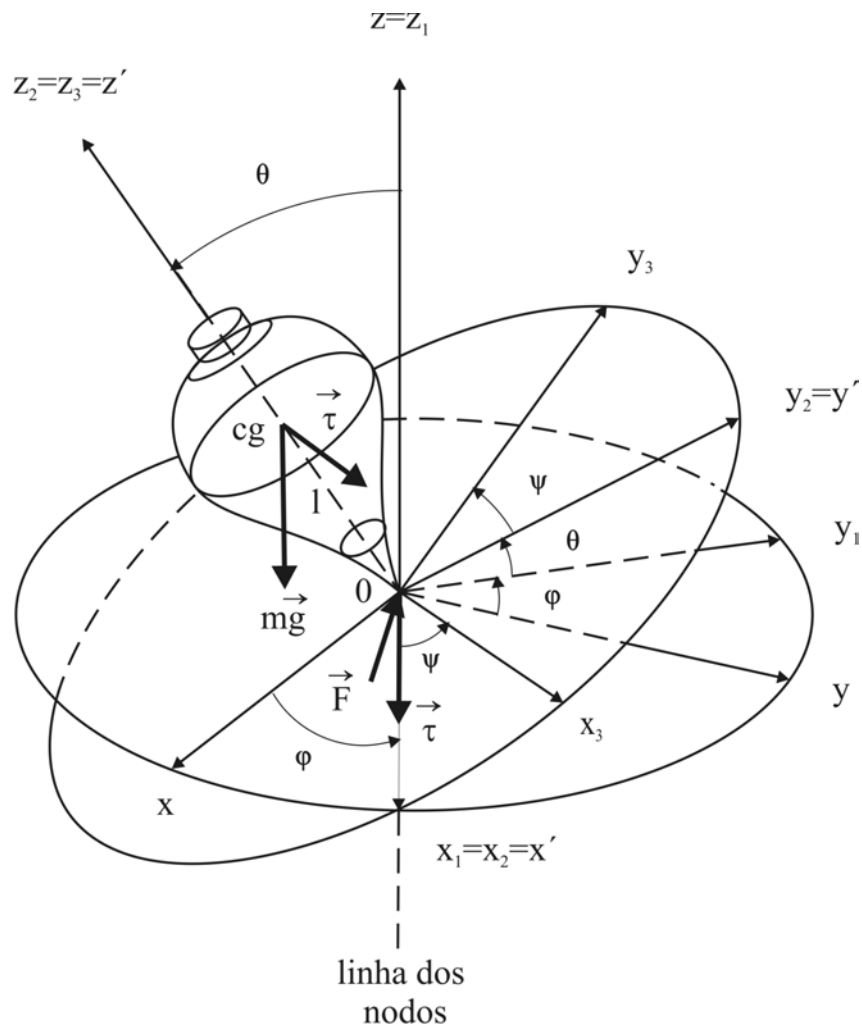


Figura 9-29

cujas soluções podem ser obtidas em termos de integrais elípticas. Entretanto, a análise física dessas equações nos permite encontrar suas soluções, sem entrar nas complicações matemáticas do problema. Observe que o problema fica mais simples se considerarmos o referencial $0x_1y_2z_3$ ($0x'y'z'$) em vez do referencial do sistema de referencia do corpo. Veja a figura 9-29. No referencial $0x_1y_2z_3$ ($0x'y'z'$) as equações para o torque serão

$$\tau_{x'} = lmg \sin \theta \quad (9.379)$$

$$\tau_{y'} = 0 \quad (9.380)$$

$$\tau_{z'} = 0 \quad (9.381)$$

Para o momento angular, teremos

$$L_{x'} = I_{x'x'} \omega_{x'} = I \dot{\theta} \quad (9.382)$$

$$L_{y'} = I_{y'y'} \omega_{y'} = I \dot{\phi} \sin \theta \quad (9.383)$$

$$L_{z'} = I_{z'z'} \omega_{z'} = I_3 \left(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right) \quad (9.384)$$

$$= I_3 S \quad (9.385)$$

onde

$$S = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (9.386)$$

Os valores de $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ e $\omega_{z'}$ foram obtidos através das equações (9.57), (9.58), (9.59), (9.61), (9.62), (9.63), (9.64), (9.65) e (9.66), fazendo $\psi = 0$. Assim, a equação de movimento

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} \quad (9.387)$$

terá componentes

$$\tau_{x'} = \frac{dL_{x'}}{dt} + \left(\omega_{y'} L_{z'} - \omega_{z'} L_{y'} \right) \quad (9.388)$$

$$\tau_{y'} = \frac{dL_{y'}}{dt} + \left(\omega_{z'} L_{x'} - \omega_{x'} L_{z'} \right) \quad (9.389)$$

$$\tau_{z'} = \frac{dL_{z'}}{dt} + \left(\omega_{x'} L_{y'} - \omega_{y'} L_{x'} \right) \quad (9.390)$$

Devemos observar que $\vec{\omega}$ difere de $\vec{\omega}'$ apenas da rotação de $\dot{\psi}$ em torno do eixo z' , isto é,

$$\omega'_{x'} = \dot{\theta} \quad (9.391)$$

$$\omega'_{y'} = \dot{\varphi} \sin \theta \quad (9.392)$$

$$\omega'_{z'} = \dot{\varphi} \cos \theta \quad (9.393)$$

$$\omega_x = \dot{\theta} \quad (9.394)$$

$$\omega_{y'} = \dot{\varphi} \sin \theta \quad (9.395)$$

$$\omega_{z'} = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (9.396)$$

Substituindo agora as equações (9.391), (9.392), (9.393), (9.382), (9.383) e (9.385) nas equações (9.388), (9.389) e (9.390), teremos as seguintes equações

$$mgl \sin \theta = I \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \left(\dot{\varphi} \sin \theta \right) I_3 S - \dot{\varphi} \cos \theta I \dot{\varphi} \sin \theta \quad (9.397)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(I \dot{\varphi} \sin \theta \right) + \dot{\varphi} \cos \theta I \dot{\theta} - \dot{\theta} I_3 S \quad (9.398)$$

$$0 = \frac{d}{dt} (I_3 S) + \left(\dot{\theta} I \dot{\varphi} \sin \theta - I \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta \right) \quad (9.399)$$

que podem ser reescritas da forma

$$I \ddot{\theta} + I_3 S \dot{\varphi} \sin \theta - I \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta = mgl \sin \theta \quad (9.400)$$

$$I \ddot{\varphi} \sin \theta + I \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + I \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} I_3 S = 0 \quad (9.401)$$

$$\frac{d}{dt} (I_3 S) = 0 \quad (9.402)$$

A equação (9.402) nos diz que a componente do momento angular na direção do eixo de simetria permanece constante, isto é,

$$L_{z'} = I_3 S = \text{constante} \quad (9.403)$$

Em relação à equação (9.401), teremos

$$I \ddot{\varphi} \sin \theta + 2I \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} I_3 S = 0 \quad (9.404)$$

Multiplicando a equação acima por $\sin \theta$,

$$I \ddot{\varphi} (\sin \theta)^2 + 2I \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - \dot{\theta} I_3 S \sin \theta = 0 \quad (9.405)$$

vemos que (9.405) pode ser escrita da forma

$$\frac{d}{dt} \left[I \dot{\phi} (\sin \theta)^2 + I_3 S \cos \theta \right] = 0 \quad (9.406)$$

Observando a figura 9-29, vemos que a componente de $\vec{L}$ na direção z é dada por:

$$L_z = L_{z'} \cos \theta + L_{y'} \cos(\pi/2 - \theta) \quad (9.407)$$

substituindo as equações (9.385) e (9.383) em (9.407),

$$L_z = I_3 S \cos \theta + I \dot{\phi} \sin \theta \sin \theta \quad (9.408)$$

$$L_z = I_3 S \cos \theta + I \dot{\phi} \sin^2 \theta \quad (9.409)$$

Considerando (9.409) com (9.406), vemos que:

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \quad (9.410)$$

Assim,

$$L_z = \text{constante} \quad (9.411)$$

As equações (9.403) e (9.411) nos dizem que as componentes L_z e $L_{z'}$ são constantes. Esse é um resultado esperado, uma vez que o torque devido ao peso é sempre dirigido ao longo da linha dos nodos, que é perpendicular aos eixos z e z' .

Devido ao fato do sistema ser conservativo, vejamos como fica a sua energia total

$$E = T_{rot} + V \quad (9.412)$$

$$E = \frac{1}{2} (I \omega_{x'}^2 + I \omega_{y'}^2 + I \omega_{z'}^2) + mgl \cos \theta \quad (9.413)$$

$$E = \frac{1}{2} (I \dot{\theta}^2 + I \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + I_3 S^2) + mgl \cos \theta \quad (9.414)$$

Resolvendo a equação (9.409) para $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - I_3 S \cos \theta}{I \sin^2 \theta} \quad (9.415)$$

Considerando agora a equação (9.403), podemos reescrever a equação anterior da forma

$$\dot{\phi} = \frac{L_z - L_{z'} \cos \theta}{I \sin^2 \theta} \quad (9.416)$$

Substituindo a equação (9.416) em (9.414), teremos

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 S^2 + \frac{1}{2} I \left(\frac{L_z - L_z' \cos \theta}{I \sin^2 \theta} \right)^2 \sin^2 \theta + mgl \cos \theta \quad (9.416)$$

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 S^2 + \frac{(L_z - L_z' \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta \quad (9.417)$$

Observando essa equação, vemos que a energia é função das constantes de movimento e do ângulo θ . Como o termo

$$E_s = \frac{I_3 S^2}{2} \quad (9.418)$$

é energia de rotação (spining), que também é uma constante de movimento, podemos redefinir uma outra grandeza, E' , que também é constante

$$E' = E - \frac{1}{2} I_3 S^2 \quad (9.419)$$

assim,

$$E' = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + V(\theta) \quad (9.429)$$

em que

$$V(\theta) = \frac{(L_z - L_z' \cos \theta)^2}{2I (\sin \theta)^2} + mgl \cos \theta \quad (9.430)$$

Isso nos mostra que E' pode ser interpretado como a energia relativo à coordenada θ . Sendo assim, podemos aplicar o método do potencial efetivo, já desenvolvido nos capítulos precedentes, para solucionar o problema.

Mostramos na figura 9-30 o gráfico de $V(\theta)$, dado pela equação (9.430). Neste gráfico vemos que para $\theta \neq \theta_{\min}$, o eixo de simetria do pião descreverá uma curva tal que $\theta_1 < \theta < \theta_2$ enquanto precessiona com velocidade angular $\dot{\varphi}$ em torno do eixo z' . Esse movimento é denominado de ntação. A forma da curva depende de como se comporta a função $\dot{\varphi}$:

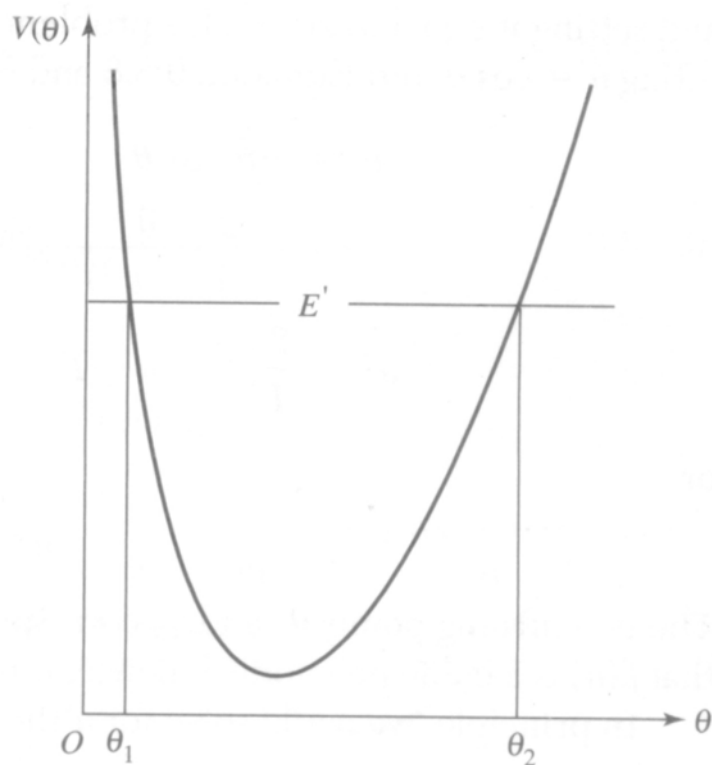
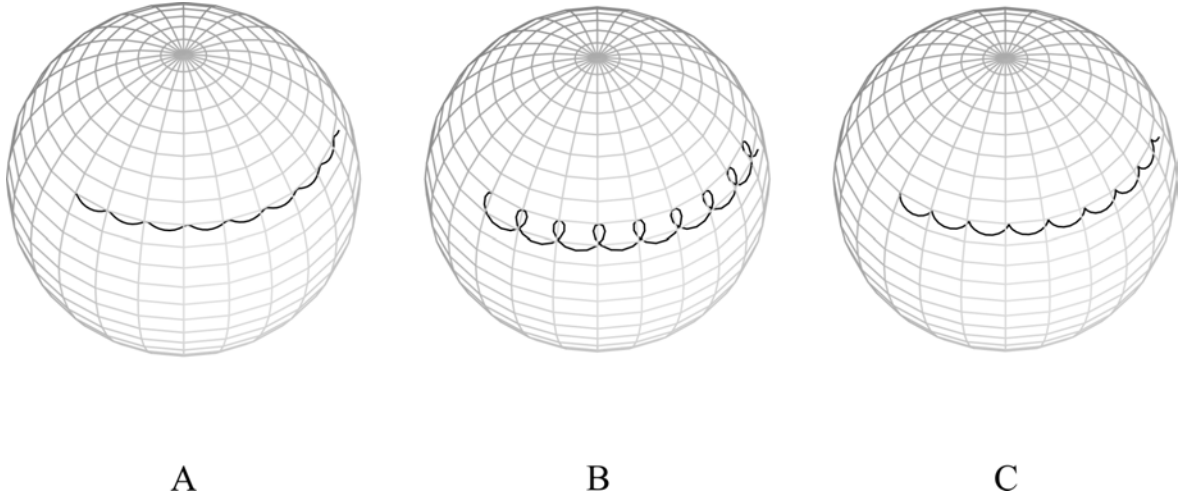


Figura 9-30

- 1 – Se $\dot{\varphi}$ não muda de sinal enquanto θ varia entre seus limites, teremos a curva descrita na figura 9-31-A;
- 2 – Se $\dot{\varphi}$ muda de sinal, teremos a curva como mostra a figura 9-31-B;
- 3 – Se $\dot{\varphi}$ se anula para um dos valores limites de θ , teremos a curva mostrada na figura 9-31-C. Essas curvas são as projeções do eixo de simetria do corpo sobre uma esfera de raio unitário com centro na origem.



Figuras 9-31-A, 9-31-B e 9-31-C

Quando $\theta = \theta_{\min}$ o movimento será uma precessão estacionária, isto é, teremos um movimento de precessão com um ângulo θ fixo. Para obtermos essa condição devemos ter

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_{\min}} = 0 \quad (9.431)$$

Assim,

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{2I(\sin \theta)^2 2(L_z - L_z' \cos \theta)L_z' \sin \theta - (L_z - L_z' \cos \theta)^2 4I \sin \theta \cos \theta}{[2I(\sin \theta)^2]^2} - mgl \sin \theta = 0 \quad (9.433)$$

$$\frac{(L_z - L_z' \cos \theta)L_z'}{I \sin \theta} - \frac{(L_z - L_z' \cos \theta)^2 \cos \theta}{I(\sin \theta)^3} - mgl \sin \theta = 0 \quad (9.434)$$

$$(L_z - L_z' \cos \theta)^2 \cos \theta - (L_z - L_z' \cos \theta)L_z'(\sin \theta)^2 + mglI(\sin \theta)^4 = 0 \quad (9.435)$$

Fazendo

$$L_z - L_z' \cos \theta = \beta \quad (9.436)$$

teremos

$$\beta^2 \cos \theta - \beta L_z'(\sin \theta)^2 + mglI(\sin \theta)^4 = 0 \quad (9.437)$$

que é uma equação do segundo grau, cujas soluções serão dadas por

$$\beta = \frac{L_z'(\sin \theta)^2 \pm [L_z'^2(\sin \theta)^4 - 4 \cos \theta mglI(\sin \theta)^4]^{1/2}}{2 \cos \theta} \quad (9.438)$$

Colocando $L_z'(\sin \theta)^2$ em evidência, teremos

$$\beta = \frac{(\sin \theta)^2 L_z}{2 \cos \theta} \left[1 \pm \left(1 - 4mglI \cos \theta / L_z^2 \right) \right]^{1/2} \quad (9.439)$$

Para soluções fisicamente aceitáveis devemos ter β real. Logo,

$$L_z^2 \geq 4mglI \cos \theta \quad (9.440)$$

como

$$L_z = I_3 \omega_3 \quad (9.441)$$

então

$$\omega_3 \geq \frac{2(mglI \cos \theta)^{1/2}}{I_3} \quad (9.442)$$

isto é, existe um valor mínimo de ω_3 para o qual a precessão estacionária é possível.

Considerando (9.416) e (9.436), podemos escrever $\dot{\phi}$ da forma

$$\dot{\phi} = \frac{\beta}{I \sin^2 \theta} \quad (9.443)$$

Como β tem duas raízes, conforme a equação (9.439), $\dot{\phi}$ terá dois valores, $\dot{\phi}_{\min(+)}$ e $\dot{\phi}_{\min(-)}$, denominados de precessão rápida e precessão lenta, respectivamente. O sinal + ou – serve para indicar o sinal a ser tomado na equação (9.439).

Se o pião gira rapidamente, L_z é grande e ω_3 maior que o valor mínimo requerido pela equação (9.442). Expandindo em série o radicando da equação (9.439) e considerando (9.443)

$$\dot{\phi}_{\min(+)} = \frac{1}{I (\sin \theta)^2} \frac{(\sin \theta)^2 L_z}{2 \cos \theta} \left[1 + \left(1 - \frac{4mglI \cos \theta}{I_3^2 \omega_3^2} \right)^{1/2} \right] \quad (9.444)$$

$$\dot{\phi}_{\min(+)} \cong \frac{L_z}{2I \cos \theta} (1+1) \quad (9.445)$$

$$\dot{\phi}_{\min(+)} \cong \frac{L_z}{I \cos \theta} \quad (9.446)$$

$$\dot{\phi}_{\min(+)} \cong \frac{I_3 \omega_3}{I \cos \theta} \quad (9.447)$$

Para $\dot{\phi}_{\min(-)}$ teremos

$$\dot{\phi}_{\min(-)} = \frac{1}{I (\sin \theta)^2} \frac{(\sin \theta)^2 L_z}{2 \cos \theta} \left[1 - \left(1 - \frac{4mglI \cos \theta}{I_3^2 \omega_3^2} \right)^{1/2} \right] \quad (9.448)$$

$$\dot{\varphi}_{\min(-)} \cong \frac{I_3 \omega_3}{2I \cos \theta} \left[1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{4mglI \cos \theta}{I_3^2 \omega_3^2} \right] \quad (9.449)$$

$$\dot{\varphi}_{\min(-)} \cong \frac{mgl}{I_3 \omega_3} \quad (9.450)$$

que é a precessão usualmente observada em piões que giram rapidamente.

Da experiência, sabemos que um pião que gira muito rápido, cujo movimento tem início na posição vertical, permanecerá girando na vertical. Dizemos neste caso que o pião está dormindo. Teremos $\theta = 0$ na equação (9.440), de modo que o critério de estabilidade para esse caso será

$$L_z^2 \geq 4mglI \quad (9.451)$$

Devido ao atrito, essa condição pode deixar de ser verificada fazendo com que o pião comece a se inclinar, caindo finalmente.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- [1] – Arya, A.P., “Introduction to Classical Mechanics”, 2th , Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- [2] – Barger, V. and Olsson, M., “Classical Mechanics – A Modern Perspective”, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [3] – Bradbury, T.C., “Theoretical Mechanics”, Wiley, Florida, 1981.
- [4] – Chow, T.L., “Classical Mechanics”, John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [5] – Fowles, G.R., and Cassiday, G.L., “Analytical Mechanics”, 6th ed., Saunders College Publishing, Philadelphia, 1999.
- [6] – Goldstein, D., “Classical Mechanics, 2th ed., Addinon-Wesley, Massachusetts, 1980.
- [7] – Marion, J.B., and Thornton, S.T., “Classical Dynamics of Particles and Systems”, 4th ed., Saunders College Publishing, Philadelphia, 1995.
- [8] – Nussenzveig, H.M., “Curso de Física Básica”, vol 1 – Mecânica, 2^a ed., Editora Edgard Blucher LTDA, São Paulo, 1981.
- [9] – Symon, K., “Mecânica”, 2^a ed., Editora Campus, Rio de Janeiro, 1988.
- [10] – Synge, J.L. and Griffiths, B.A., “Principles of Mechanics”, New York, 1959.

Expansão em Séries

Caso geral

$$f(x+a) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

em que

$$f^{(n)}(a) = \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=a}$$

para $a = 0$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Casos particulares

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < \infty \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < \infty \quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad -\infty < x < \infty \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad |x| < \pi/2$$

Caso geral

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}x^2 + \dots + \binom{n}{m} a^{n-m}x^m + \dots$$

$$\text{em que } \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Caso $|x/a| < 1$ a série converge.

Casos particulares

$$(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \pm \frac{x^3}{16} - \dots \quad (1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} \mp \frac{5x^3}{16} + \dots$$

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots \quad (1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + \dots$$

Números Complexos

$$z = x + iy \quad \text{em que } x = \operatorname{Re}(z) \quad \text{e } y = \operatorname{Im}(z) \quad z^* = x - iy$$

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2} = r \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

$$z = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta} \quad z^* = |z|e^{-i\theta} = re^{-i\theta}$$

Funções Trigonômétricas e Hiperbólicas

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{(1 + \cos \theta)}{2}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)}$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \cotg^2 \theta = 1$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \operatorname{sen} B \cos A$$

$$A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\theta \pm \delta) \text{ em que } \operatorname{tg} \delta = \mp B/A$$

$$A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta = \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen}(\theta \pm \delta) \text{ em que } \operatorname{tg} \delta = \pm A/B$$

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cos A - \cos B = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{A+B}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cotg(A \pm B) = \frac{\cotg A \cotg B \mp 1}{\cotg A \pm \cotg B}$$

$$\cos \theta = \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{2}$$

$$\operatorname{senh} \theta = \frac{(e^\theta - e^{-\theta})}{2}$$

$$\cosh \theta + \operatorname{senh} \theta = e^x$$

$$\operatorname{senh}^2 \theta = \frac{1}{2}(\cosh 2\theta - 1)$$

$$\operatorname{tgh} \theta = \frac{(e^{2\theta} - 1)}{(e^{2\theta} + 1)}$$

$$\cos(i\theta) = \cosh \theta$$

$$\cosh(i\theta) = \cos \theta$$

$$\operatorname{senh}(A \pm B) = \operatorname{senh} A \cosh B \pm \cosh A \operatorname{senh} B$$

$$\cosh(A \pm B) = \cosh A \cosh B \pm \operatorname{senh} A \operatorname{senh} B$$

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cotg \theta = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{(1 - \cos \theta)}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = 4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

$$\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)}$$

$$\sec^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta = 1$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

$$\operatorname{tg}(A \pm B) = \frac{\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B}{1 \mp \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{2i}$$

$$\cosh \theta = \frac{(e^\theta + e^{-\theta})}{2}$$

$$\cosh \theta - \operatorname{senh} \theta = e^{-x}$$

$$\cosh^2 \theta = \frac{1}{2}(\cosh 2\theta + 1)$$

$$\operatorname{sen}(i\theta) = i \operatorname{senh} \theta$$

$$\operatorname{senh}(i\theta) = i \operatorname{sen} \theta$$

$$\cosh^2 \theta - \operatorname{senh}^2 \theta = 1$$

Notas de aula da disciplina MECÂNICA TEÓRICA I

Esse livro é resultante das notas de aula da disciplina Mecânica Teórica I, ministrada por mim no Curso de Graduação em Física da Universidade Federal do Maranhão. No Curso de Física, tanto na Licenciatura quanto no Bacharelado, esta disciplina faz parte do núcleo obrigatório; tem carga horária semestral de 60 horas e é cursada após o aluno ter estudado as seguintes disciplinas: Física Geral e Experimental I (Mecânica básica), Cálculo III (Cálculo de várias variáveis) e Equações Diferenciais Ordinárias.

A apresentação desse livro pode ser dividida em três partes. Na primeira, capítulos de I a IV, apresentamos a notação a ser utilizada, as Leis de Newton e os Teoremas de Conservação para uma partícula e para um sistema de partículas. Complementando, fazemos a generalização das Leis de Newton para sistemas não inerciais.

Na segunda parte (capítulos V a VIII), aplicamos a teoria desenvolvida a problemas fundamentais da Mecânica Clássica: Oscilações, Forças Centrais, Gravitação e Colisões.

Por último, capítulo IX, generalizamos o formalismo para que este possa ser aplicado a corpos macroscópicos - idealizados como corpos rígidos.

Durante todo o texto procurei desenvolver todas as passagens matemáticas necessárias à compreensão do problema físico envolvido.

A. Pinto Neto

Apoio financeiro:



UFMA



FAPEM